

DIPLOMARBEIT

MONOPOLE UND
KONTAKTSTRUKTUREN

AMARENDRAN RAMASWAMI SUBRAMANIAN

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



DIPLOMARBEIT IM FACH MATHEMATIK

MONOPOLE UND KONTAKTSTRUKTUREN

vorgelegt von

AMARENDRAN RAMASWAMI SUBRAMANIAN

im Januar 2003

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Leeb und Priv-Doz. Dr. Sebastian Goette

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



EBERHARD-KARLS-UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN



Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides Statt, diese Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben. Ferner habe ich die Arbeit noch keinem anderen Prüfungsamt vorgelegt.

Tübingen, Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Grundlagen	11
2.1	Seiberg-Witten-Theorie im geschlossenen Fall	11
2.1.1	Die Clifford-Algebra und die Gruppe $Spin^c(n)$	11
2.1.2	$Spin^c$ -Strukturen und die komplexe Spin-Darstellung	13
2.1.3	Der $Spin^c$ -Zusammenhang und der Dirac-Operator	18
2.1.4	Die SW-Gleichungen und der Modulraum	20
2.1.5	Die SW-Invariante	23
2.2	Fast komplexe Strukturen und 2-Felder	24
3	Eine spezielle Seiberg-Witten-Theorie	31
3.1	Ersetzen des Randes ∂X durch ein Kegellende	32
3.2	Die Seiberg-Witten-Gleichungen	35
3.2.1	Der Konfigurationsraum und die Gruppe der Eichtransformationen	35
3.2.2	Die perturbierten SW-Gleichungen	38
3.3	Linearisierung der Gleichungen	39
3.3.1	Vorbereitung	39
3.3.2	Fredholm-Theorie	43
3.4	Der Seiberg-Witten-Modulraum	61

3.4.1	Der Quotientenraum	63
3.4.2	Glatte Struktur auf dem parametrisierten Modulraum	65
3.4.3	Kompaktheit	67
3.4.4	Definition der Invariante	85
3.4.5	Stabilität des Modulraums	86
4	Die Endlichkeitsaussage	91
4.1	Kompatibilität mit dem Kegelerde von X^+	92
4.2	Homotopieklassifikation von 2-Ebenen-Feldern	95
4.3	Die SW-Gleichungen auf dem Zylinder	100
4.3.1	Das Chern-Simons-Dirac-Funktional	100
4.3.2	3-Dimensionale Seiberg-Witten-Theorie	103
4.4	Mannigfaltigkeiten mit Zylinderenden	105
4.4.1	Definition des Seiberg-Witten-Modulraums unter Randbedingungen	105
4.4.2	Formale Dimension des SW-Modulraums und Eigenschaften	106
4.4.3	Kritische Punkte und 2-Ebenen-Felder	108
4.5	Beweis der Endlichkeitsaussage	111
A	Berechnung einer Eulerklasse	119
A.1	Einkleben von $\mathbb{C}P^2$	120
A.1.1	Nullstelle vom Index -1	125
A.1.2	Nullstelle vom Index $+1$	127
A.2	Änderung von $\text{ind}(\mathcal{D})$ um ± 1	130
	Literaturverzeichnis	138

Kapitel 1

Einführung

Für das Studium glatter 4-Mannigfaltigkeiten hat sich die Eichtheorie als geeignetes Instrument herausgestellt. Eichtheoretische Invarianten von Prinzipalbündeln über glatten 4-Mannigfaltigkeiten, wie zum Beispiel die Invarianten von Donaldson in den Anfängen der Eichtheorie, führen zu einem tieferen Verständnis von geschlossenen 4-Mannigfaltigkeiten. Die durch die Arbeiten [48] und [47] von Seiberg und Witten eingeführten eichtheoretischen Invarianten, die im engen Zusammenhang mit den Donaldson-Invarianten (vgl. [8]) stehen, ergeben eine sehr reichhaltige Theorie, mit deren Hilfe tiefliegende Ergebnisse bewiesen werden können, wie z.B. die Thom-Vermutung in [26]. Diese Seiberg-Witten-Invarianten, deren zugrunde liegende Theorie eines der zentralen Themen dieser Arbeit darstellt, ermöglichen ein großes Verständnis der Topologie und Strukturen auf glatten vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten und sind im Gegensatz zu den Donaldson-Invarianten analytisch leichter zugänglich.

Die klassische Seiberg-Witten-Theorie legt glatte geschlossene und orientierte Riemannsche 4-Mannigfaltigkeiten (vgl. [48], [34]) zugrunde. In dieser Arbeit werden wir die Voraussetzung einer geschlossenen Mannigfaltigkeit abschwächen und stattdessen den Fall von kompakten orientierten 4-Mannigfaltigkeiten mit einem geschlossenen 3-Rand betrachten. Da die Seiberg-Witten-Theorie im geschlossenen Fall, welche wir als Erstes im nächsten Kapitel zusammenfassen, auf einer Fredholm-Theorie basiert, die fast ausschließlich durch die Geschlossenheit gerechtfertigt wird, werden wir uns analytisch sehr intensiv mit unserer neuen Situation auseinandersetzen müssen. Wir werden dabei nicht umhin kommen, bestimmte Voraussetzungen an die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit X (mit Rand) zu machen. Die wichtigste Voraussetzung ist die Existenz einer Kontaktstruktur auf dem Rand ∂X , denn diese wird uns ermöglichen den Rand durch ein Kegellende zu ersetzen, welches dann eine kanonische symplektische Struktur trägt.

Um ein besseres Verständnis zu erlangen, widmen wir uns jetzt zuerst den Definitionen einer symplektischen und einer Kontaktstruktur.

Definition 1.1 (i) Sei M eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *geschlossene* 2-Form $\omega \in \Omega^2(T^*M)$ heisst *symplektische Form*, falls ω^n eine Volumenform auf M ist. Eine symplektische Form ω heisst kompatibel zu einer Orientierung von M , falls ω^n eine positive Volumenform ist.

(ii) Sei N eine $2n + 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form $\lambda \in \Omega^1(T^*X)$ heisst *Kontaktform*, falls $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ eine Volumenform auf N ist. Eine Kontaktform λ heisst kompatibel zu einer Orientierung von N , falls $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ eine positive Volumenform auf N ist.

Sei (N, λ) eine $2n + 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Kontaktform λ , dann betrachten wir das $2n$ -dimensionale, orientierte Vektorbündel $\xi \rightarrow N$, welches an jedem Punkt $m \in N$ durch

$$\xi_m = \ker(\lambda_m) \tag{1.1}$$

gegeben ist. Dies ergibt in der Tat ein Vektorbündel der Dimension $2n$, da $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ eine Volumenform definiert und so das lineare Funktional $\lambda_m : T_m N \rightarrow \mathbb{R}$ an jedem Punkt ungleich 0 ist.

Die Orientierung wird durch das Normalenvektorfeld zu ξ , welches das Duale Vektorfeld zu θ ist, induziert. Wir wollen $2n$ -Ebenen-Felder, die durch eine Kontaktform θ induziert werden, aufgrund dieser Äquivalenz ebenfalls als Kontaktstruktur bezeichnen.

Definition 1.2 Ein orientiertes $2n$ -Ebenen-Feld $\xi \rightarrow N$ über einer orientierten $2n + 1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit heisst *kompatible Kontaktstruktur*, falls es eine zur Orientierung von N kompatible Kontaktform λ gibt, die an jedem Punkt (1.1) erfüllt.

Wie weiter oben bereits angedeutet, betrachten wir eine kompakte und orientierte 4-Mannigfaltigkeit X mit einem geschlossenen 3-Rand $\partial X = Y$ auf dem eine Kontaktstruktur $\xi \rightarrow Y$ lebt. Das Kapitel 3 wird daher, [25] folgend, eine spezielle Seiberg-Witten-Theorie für diesen Fall etablieren, die zu vielen parallelen Resultaten wie im geschlossenen Fall führt. Als Ansatz werden wir den Rand Y durch $[1, \infty) \times Y$, versehen mit einer Kegelmétriek, ersetzen. Auf diesem so erhaltenen Kegelende existiert wegen der Kontaktstruktur auf Y eine kanonische symplektische Struktur. Diese induziert dann eine kanonische $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} , einen kanonischen Spinor Φ_0 und einen kanonischen $Spin^c$ -Zusammenhang A_0 , der $D_{A_0} \Phi_0 = 0$ erfüllt (siehe Proposition 2.12). Wir wählen die Sobolev-Räume für die Spinoren

und für die $Spin^c$ -Zusammenhänge derart, dass deren Elemente entlang dem Kegelige in der L^2 -Topologie gegen Φ_0 bzw. A_0 konvergieren. Diese Voraussetzungen sind die Zutaten, um eine geeignete Fredholm-Theorie der Seiberg-Witten-Gleichungen und daraus resultierende SW-Modulräume zu erhalten. Wir werden zeigen, dass die Linearisierung der Seiberg-Witten-Gleichungen mit geeigneter Eich-Fixierung analog zum geschlossenen Fall Fredholm-Operatoren sind, deren Index gleich der formalen Dimension der Modulräume ist. Anschließend kommen wir zum ersten wichtigen Zwischenergebnis, das besagt, dass diese Modulräume für generische Perturbationen glatt sind. Anschließend untersuchen wir den Fall, dass man die symplektische Struktur vom Kegelige auf die ganze Mannigfaltigkeit fortsetzen kann. Wir zeigen analog zu [44], dass in diesem Fall der Fredholm-Index und somit auch die formale Dimension der Modulräume gleich 0 ist.

Aus dem geschlossenen, symplektischen Fall wissen wir (vgl. [44]), dass die Seiberg-Witten-Invariante gleich 1 ist, der Modulraum also generisch nicht leer ist. Dies führt uns dann zum zentralen Zwischenergebnis: Unter der Voraussetzung, dass die symplektische Form auf dem Kegelige auf die ganze Kegeldenmannigfaltigkeit fortgesetzt werden kann, ist der von uns eingeführte Seiberg-Witten-Modulraum analog zum geschlossenen Fall generisch nicht leer.

In Kapitel 4 wenden wir uns einer geometrischen Endlichkeitsaussage zu, die wir mit Hilfe der speziellen Seiberg-Witten-Theorie aus dem vorherigen Kapitel zeigen werden.

Von J. Martinet (vgl. [32]) wurde gezeigt, dass jede geschlossene, orientierte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit eine Kontaktstruktur besitzt. Diese also nicht leere Menge von Kontaktstrukturen auf geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten wird, durch [11] motiviert, in die Menge der *straffen* (*tight*) und in die Menge der überdrehten (*overtwisted*) Kontaktstrukturen aufgeteilt.

Definition 1.3 Sei N eine 3-Mannigfaltigkeit und $\xi \rightarrow N$ eine Kontaktstruktur in Form eines 2-Ebenen-Feldes. Angenommen es gibt eine eingebettete abgeschlossene 2-Scheibe $D \subset N$, so dass $T\partial D \subset \xi|_D$ und $T_m D \neq \xi_m$ für jeden Punkt $m \in N$. Dann heisst D eine *overtwisted disk* und ξ eine *overtwisted Kontaktstruktur*. Falls es keine solche Scheibe D gibt, heisst ξ eine *straffe* (*tight*) *Kontaktstruktur*.

Um die vielen geometrischen Informationen tragenden straffen Kontaktstrukturen von einer anderen Warte aus sehen zu können, brauchen wir den in dieser Arbeit zentralen Begriff der symplektischen (Semi-)Füllbarkeit.

Definition 1.4 (i) Sei X eine orientierte 4-Mannigfaltigkeit deren orientierter geschlossener 3-Rand Y , (d.h. ist $\vartheta \wedge \eta$ eine positive Volumenform

auf X , wobei $\vartheta \in C^\infty(T^*X|_{\partial X})$ dual zum Normalenfeld von $Y = \partial X$ und η eine positive Volumenform auf Y sei) eine zu der Orientierung kompatible Kontaktstruktur ξ trägt, dann nennen wir (Y, ξ) *orientierter Kontaktrand* von X .

(ii) Trägt X zusätzlich eine symplektische Struktur ω , dann nennen wir (X, ω) und (Y, ξ) *kompatibel*, wenn $\omega|_{\xi} > 0$, d.h. ω ausgewertet auf einer positiv orientierten 2-Basis von ξ größer 0 ist.

(iii) Wir nennen eine geschlossene (nicht notwendigerweise zusammenhängende) 3-Kontaktmannigfaltigkeit (Y, ξ) *symplektisch füllbar*, wenn sie orientierter Kontaktrand einer zu ihr kompatiblen symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) ist. Wir sagen (Y, ξ) ist *symplektisch semi-füllbar*, wenn jede Zusammenhangskomponente von Y als Zusammenhangskomponenten einer (eventuell anderen) symplektisch füllbaren 3-Kontaktmannigfaltigkeit realisiert werden kann.

Der wichtige Zusammenhang zwischen straffen Kontaktstrukturen und symplektisch füllbaren Kontaktstrukturen auf geschlossenen, orientierten 3-Mannigfaltigkeiten wird durch das zentrale Ergebnis von Eliashberg (vgl. [10]) gegeben, welches besagt, dass symplektisch füllbare Kontaktstrukturen immer straff sind. Nach [29] gilt aber nicht, dass jede straffe Kontaktstruktur symplektisch (semi-)füllbar ist.

In Kapitel 4 erklären wir dann den Beweis (vergleiche [25]) des Hauptresultats dieser Arbeit: die Endlichkeits-Aussage über symplektisch semi-füllbare Kontaktstrukturen, die im folgenden Theorem festgehalten wird:

Theorem 1.1 *Sei Y eine geschlossene, orientierte 3-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nur endlich viele Homotopieklassen von orientierten 2-Ebenen-Feldern $\xi \rightarrow Y$, die als symplektisch semi-füllbare Kontaktstruktur realisiert werden können.*

Wir können aus Theorem 1.1 jedoch **nicht** ableiten, dass auf einer geschlossenen orientierten 3-Mannigfaltigkeit es nur endlich viele semi-füllbare Kontaktstrukturen gibt, die nicht zueinander homotop (als Kontaktstrukturen) sind.

Um Theorem 1.1 in Kapitel 4 zu zeigen, unterscheiden wir Homotopieklassen von 2-Ebenen-Feldern anhand ihrer Eulerklassen. Wir werden zeigen, dass im Fall der symplektischen Füllbarkeit, die kanonische symplektische Struktur nach einer 'milden' Störung auf dem Kegelende aus Kapitel 3 global auf die eingefüllte Mannigfaltigkeit fortgesetzt werden kann. Diese Fortsetzung wird natürlich im Wesentlichen durch die symplektische Form aus der symplektischen Füllung gegeben. Die Anwendung des oben erwähnten

Ergebnisses, dass in diesem Fall der Seiberg-Witten-Modulraum generisch nicht leer ist, wird die Basis des Beweises von dieser Endlichkeitsaussage sein und somit die Brücke zum vorherigen Kapitel über die Seiberg-Witten-Theorie schlagen. An dieser Stelle werden wir neben den Kegelenden auch Zylinderenden betrachten. Da hierfür jedoch ganz wesentlich Techniken aus der APS-Theorie (siehe [1],[2],[31],[37]) nötig sind, welche sehr umfangreich zu erklären wären, unterstellen wir an diesen Stellen dem Leser die Kenntnis dieser Theorie und stellen die Beweise dementsprechend verkürzt als Beweisskizzen dar.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir zuerst die Grundlagen der Seiberg-Witten-Gleichungen und Invarianten für geschlossene 4-Mannigfaltigkeiten rekapitulieren und die wichtigsten Ergebnisse in Erinnerung rufen. Der Leser sei für weiterführende Details auf das Buch von J.W. Morgan [34] verwiesen. Anschließend erklären wir im darauffolgenden Abschnitt 1-zu-1 Korrespondenzen zwischen $Spin^c$ -Strukturen, fast komplexen Strukturen und symplektischen Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten sowie zwischen $Spin^c$ -Strukturen und orientierte 2-Ebenen-Felder auf 3-Mannigfaltigkeiten.

2.1 Seiberg-Witten-Theorie im geschlossenen Fall

Der folgende Unterabschnitt dient dazu, die für uns am besten geeignete Definition einer $Spin^c$ -Struktur und der komplexen Spin-Darstellung einzuführen. Der darauffolgende Unterabschnitt wiederholt die Definition des $Spin^c$ -Zusammenhangs und des assoziierten Dirac-Operators. Ausgestattet mit diesen Werkzeugen, erläutern wir in den letzten beiden Unterabschnitten die Seiberg-Witten-Gleichungen, die Konstruktion des Modulraums und die SW-Invariante.

2.1.1 Die Clifford-Algebra und die Gruppe $Spin^c(n)$

Sie V ein beliebiger reeller Vektorraum der Dimension n mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\| \cdot \|$ und sei

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ mal}} \right)$$

seine Tensoralgebra. Diese Tensoralgebra $T(V)$ modulo dem beidseitigen Ideal, das durch alle Elemente der Form

$$v \otimes v + \|v\|^2 1$$

erzeugt wird, bezeichnen wir als die Clifford-Algebra $Cl(V)$ von V .

Die \mathbb{Z} -Graduierung von $T(V)$ wird dabei zu einer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung von

$$Cl(V) = Cl_0(V) \oplus Cl_1(V),$$

wobei $Cl_0(V)$ bzw. $Cl_1(V)$ die Unteralgebra sei, die aus Elementen besteht, die einen Repräsentanten mit geraden bzw. ungeradem Grad in der Tensoralgebra $T(V)$ haben.

Es sei $Pin(V) \subset Cl(V)$ die Gruppe, die durch alle Elemente $v \in V$ mit $\|v\|^2 = 1$ (multiplikativ) erzeugt wird. Nun definieren wir die Untergruppe $Spin(V)$ von $Pin(V)$ durch

$$Spin(V) = Pin(V) \cap Cl_0(V).$$

Sie besteht also aus allen geraden Elementen aus $Pin(V)$.

Wir möchten nun verstehen, wie ein Element $v \in Pin(V)$ durch konjugieren auf $Cl(V)$ wirkt. Hierfür sei $x \in Cl(V)$, dann ist diese Konjugation aufgrund der Clifford-Relation durch

$$x \rightarrow v^{-1} \cdot x \cdot v = x - 2\langle x, v \rangle v \in V \cap Cl(V)$$

gegeben, wobei \cdot die Clifford-Multiplikation bezeichne. Daraus erkennen wir, dass Elemente aus $Pin(V)$ auf $V \subset Cl(V)$ wie Spiegelungen aus $O(V)$ operieren (vgl. auch [34, §2.2, Lem. 2.2.2]). Schränken wir also diese Wirkung auf die geraden Elementen von $Pin(V)$ ein, die genau durch $Spin(V)$ gegeben sind, dann erhalten wir, da eine gerade Anzahl hintereinander ausgeführter Spiegelungen eine Drehung darstellt, eine induzierte Abbildung

$$Spin(V) \rightarrow SO(V).$$

Dies ist für $n \geq 3$ die nicht triviale zweifache (universelle) Überlagerung von $SO(V)$ und es gilt $Spin(V)/\{\pm 1\} \cong SO(V)$ (siehe [34, §2.3]).

Die Gruppe $Spin^c(V)$ als komplexe Version von $Spin(V)$ definieren wir analog durch

$$Spin^c(V) = Spin(V) \times_{\{\pm 1\}} S^1 \subset Cl(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

und es gilt wie oben, dass

$$Spin^c(V) \rightarrow SO(V) \times S^1 = Spin^c(V)/\{\pm 1\}$$

eine nicht triviale zweifache Überlagerung ist. Das Zentrum von $Spin^c(V)$ besteht also aus $\{\pm 1\} \times_{\{\pm 1\}} S^1 \cong S^1$. Und $Spin^c(V)$ modulo diesem Zentrum ist dann wieder $SO(V)$ (vgl. [34, §2]).

2.1.2 $Spin^c$ -Strukturen und die komplexe Spin-Darstellung

Wir betrachten eine geschlossene, orientierbare n -Mannigfaltigkeit X mit Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Das $SO(n)$ -Prinzipalbündel, das durch das Tangentialbündel TX als Strukturgruppen-Bündel induziert wird, bezeichnen wir mit

$$P \rightarrow X.$$

Eine $Spin^c$ -Struktur von X ist dann ein globaler Lift zu einer 2-fachen Überlagerung des Bündels P :

Definition 2.1 *Eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ ist ein $Spin^c(n)$ -Prinzipalbündel mit der Eigenschaft, dass \tilde{P} modulo dem Zentrum $\{\pm 1\} \times_{\{\pm 1\}} S^1 \subset Spin^c(n)$ gleich dem $SO(n)$ -Prinzipalbündel $P \rightarrow X$ ist.*

In dem für uns interessanten Fall einer geschlossenen 4-Mannigfaltigkeit wissen wir, dass es immer einen Lift von $P \rightarrow X$ zu einer solchen $Spin^c$ -Struktur (siehe [34, §2.2, §3.1]) $\tilde{P} \rightarrow X$ gibt. Dies ist auf die Existenz eines Lifts der zweiten Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(X) \in H^2(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ zu einem Element aus $H^2(X; \mathbb{Z})$ zurückzuführen (vgl. [34, §3.1, Lem. 3.1.2]). Für den beliebigen n -dimensionalen Fall muss es i.A. keine $Spin^c$ -Struktur im obigen Sinne geben.

2.1.2.1 Die komplexe Spin-Darstellung

Im folgenden interessieren wir uns, welche Darstellungen die komplexifizierte Clifford-Algebra $Cl(n) \otimes \mathbb{C}$ für $n = 3, 4$ als Endomorphismenalgebra eines Vektorraums besitzt. Es stellt sich heraus, dass es für $n = 4$ (allgemein für n gerade) bis auf Isomorphie genau eine irreduzible Darstellung und für $n = 3$ (allgemein für n ungerade) genau zwei irreduzible Darstellungen gibt.

Wir betrachten zunächst $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und der kanonischen (fast) komplexen Struktur J (die durch $Je_1 = e_2$ und $Je_3 = e_4$ gegeben ist) und setzen

$$T = (V \otimes \mathbb{C})^{1,0}.$$

Sei $S := \Lambda^* T$, dann definieren wir die *komplexe Spin-Darstellung*

$$\rho : V \rightarrow \text{End}(S)$$

wie folgt: Sei $w \in V$ und $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^* T = S$ sowie

$$\pi_{1,0}(w) = \frac{1}{2}(w - iJw)$$

die Projektion auf den $(1,0)$ -Anteil von w . Dann wird die komplexe Spin-Darstellung durch

$$\rho(w) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sqrt{2}(\pi_{1,0}(w) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) - \pi_{1,0}(w) \lrcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)) \quad (2.1)$$

definiert, wobei \lrcorner die Kontraktion

$$v \lrcorner (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{(j-1)} \langle v, e_{i_j} \rangle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \quad (2.2)$$

bezüglich dem hermitesch fortgesetzten Skalarprodukt bezeichne. Falls man das komplex linear fortgesetzte Skalarprodukt verwendet, muss man mit $\pi^{0,1}(w)$ kontrahieren. In der Literatur sind beide Versionen zu finden.

Diese Darstellung erfüllt $\rho(w)\rho(w) = -\|w\|^2 Id$ (vgl. [34, §3.4]) und lässt sich deswegen zu einer Darstellung von $Cl(V) \otimes \mathbb{C}$ in $\text{End}(S)$ ausweiten und ist die einzige irredzible Darstellung von $Cl(V)$. Es gilt sogar, dass $\rho : Cl(V) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \text{End}(S)$ ein Isomorphismus ist (siehe z.B. [22, §1.8]).

Es gibt eine natürliche Zerlegung von S in

$$S = S^+ \oplus S^-,$$

indem man $S^+ = \Lambda^{2*}T$ und $S^- = \Lambda^{2*-1}$ definiert. Die Räume S^+ und S^- sind beide komplex 2-dimensional.

Proposition 2.1 *Sei e_1, \dots, e_4 eine ON-Basis des 4-dimensionalen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und sei*

$$\omega_{\mathbb{C}} := -e_1 e_2 e_3 e_4 \in Cl(V),$$

dann hängt $\omega_{\mathbb{C}} \in Cl(V)$ nicht von der Wahl der ON-Basis ab und $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ hat genau die Eigenwerte ± 1 mit den Eigenräumen S^{\pm} (respektive).

Beweis: Die Unabhängigkeit von $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ von der Wahl der ON-Basis ist eine Standard-Rechnung (vgl. [34, §2.3]).

Quadrieren ergibt $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$ und somit ist $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ als Isomorphismus des komplexen Vektorraums W diagonalisierbar. In dieser Diagonalisierung sieht man dann sofort wegen $\sqrt{1} = \pm 1$, dass $\rho(\omega_{\mathbb{C}})$ nur die behaupteten Eigenwerte hat. Die jeweiligen Eigenräume rechnet man ohne Umwege über die komplexe Spin-Darstellung (2.1) nach (vgl. [34, §2.3/2.4]). \square

Sei nun $V = \mathbb{R}^3$. Die komplexe Spin-Darstellung von $Cl(V)$ erhalten wir in diesem Fall aus dem 4-dimensionalen Fall. Wir betten \mathbb{R}^3 vermöge

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0, x_1, x_2, x_3)$$

in \mathbb{R}^4 ein. Sei $S' := S^+$ der entsprechende Anteil aus der Zerlegung $S = S^+ \oplus S^-$. Sei $v \in V = \mathbb{R}^3$ und $e_1 \in \mathbb{R}^4$ der erste Einheitsvektor, dann ist nach obigen Ausführungen

$$\rho(v \cdot e_1) \in \text{End}(S^+) = \text{End}(S').$$

Wir behaupten, dass sich dies zu einer Darstellung von $Cl(3) \otimes \mathbb{C} \in \text{End}(S')$ fortsetzt. Da in \mathbb{R}^4 gilt, dass $e_1 \perp V = \mathbb{R}^3$ ist, gilt für $v, w \in V$ in $Cl(\mathbb{R}^4)$

$$v \cdot e_1 \cdot w \cdot e_1 = -v \cdot w \cdot e_1 \cdot e_1 = v \cdot w.$$

Aus Dimensionsgründen gilt nun sogar $Cl_0(V) \otimes \mathbb{C} \cong \text{End}(S')$. Da man auf analoge Weise auch S^- hätte nehmen können, gibt es in Dimension 3 zwei irreduzible komplexe Spin-Darstellungen. Wir wollen die eben eingeführte komplexe Spin-Darstellung als Konvention fixieren (vgl. [22, §1.8]).

2.1.2.2 Das Spinorbündel

Nun definieren wir in Dimension $n = 3, 4$ zu einer $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ das assoziierte komplexe Spinorbündel durch

$$W := \tilde{P} \times_{Spin^c(n)} S \rightarrow X.$$

In Dimension 4 induziert die Zerlegung $S = S^+ \oplus S^-$, wegen der Unabhängigkeit von der gewählten ON-Basis von $\omega_{\mathbb{C}}$, eine Zerlegung des Spinorbündels $W \rightarrow X$ in die Halb-Spinor-Bündel $W^{\pm} \rightarrow X$. Wir definieren dann das *Determinanten-Linienbündel* $\det(\tilde{P} \rightarrow X)$ als das Determinantenbündel $\det(W^+) \rightarrow X$ in Dimension 4 und als $\det(W) \rightarrow X$ in Dimension 3.

Wir werden jetzt einen kanonischen Zusammenhang zwischen $Spin^c$ -Strukturen in Dimension 3 und 4 herstellen: Sei X eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ und Determinanten-Linienbündel \mathcal{L} und sei X als $\{0\} \times X$ in $\mathbb{R} \times X$ eingebettet, welches mit einer Produktstruktur ausgestattet sei. Wir setzen \tilde{P} unter dem Pullback auf den ganzen Zylinder fort und erhalten also ein $Spin^c(3)$ -Prinzipalbündel auf $\mathbb{R} \times X$. Wegen der Produktstruktur operiert $\rho(dt)$ global auf $\tilde{P} \subset Cl(T^*(\mathbb{R} \times X))$. Wir setzen nun \tilde{P}' als das Prinzipalbündel über dem Zylinder, welches durch \tilde{P} und $\rho(dt)$ erzeugt wird und nennen es *die Pullback $Spin^c$ -Struktur von \tilde{P}* . Dies ist in der Tat eine $Spin^c$ -Struktur, da $\rho(dt)$ global operiert). Sei $\mathcal{L}' \rightarrow \mathbb{R} \times X$ das Linienbündel, welches durch Pullback entlang dem Zylinder aus \mathcal{L} entsteht. Es erfüllt also

$$c_1(\mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L}) \in H^2(\mathbb{R} \times X; \mathbb{Z}).$$

Dann ist nach obiger Konstruktion und vorherigem Unterabschnitt das Spinorbündel $W \rightarrow X$ von $\tilde{P} \rightarrow X$ vermöge $\rho(dt)$ isomorph zum Bündel $W^+ \rightarrow \{0\} \times X$, das durch die $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P}' \rightarrow \mathbb{R} \times X$ definiert wird.

2.1.2.3 Der Raum der $Spin^c$ -Strukturen

Sei X eine 4-dimensionale geschlossene, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer beliebigen $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ und assoziiertem Spinorbündel $W^\pm \rightarrow X$. Da $Cl_0(TX) \cong End(W^+)$ gilt, ist $Spin^c(4)$ die Strukturgruppe des 2-dimensionalen komplexen Vektorbündels $W^+ \rightarrow X$.

Die Gruppe $Spin(4)$ operiert global auf $\tilde{P} \rightarrow X$, da $Spin(4)$ als

$$Spin(4) \times_{\{\pm 1\}} \{\pm 1\}$$

in $Spin^c(4)$ eingebettet werden kann. Sei nun \mathcal{L} das assoziierte (komplexe) Linienbündel bzw. $U(1)$ -Bündel, das durch faserweises Heraustreten von $Spin(4)$ aus \tilde{P} entsteht. Da $Spin(4)$ den Elementen aus $End(W^+)$ mit Determinante gleich 1 entspricht, gilt

$$\mathcal{L} = \det(\tilde{P}) \times_{S^1} \mathbb{C} = \det(W^+).$$

Bemerkung 2.2 In obiger Gleichung wird ein $U(1)$ -Bündel mit einem komplexen Linienbündel gleichgesetzt. Diese Begriffe sind äquivalent, da durch Übergang zum Strukturgruppen-Bündel eines Linienbündels bzw. durch Übergang zum assoziierten komplexen Vektorbündel eines $U(1)$ -Bündels diese Objekte bijektiv korrespondieren (vgl. [22, §1.5]).

Man weiss, dass die Gruppe $H^2(X; \mathbb{Z})$ einfach und transitiv auf der Menge $Spin^c(X)$ der Isomorphieklassen von $Spin^c$ -Strukturen operiert, wobei diese Operation von $\alpha \in H^2(X; \mathbb{Z})$ durch Tensorieren des Spinorbündels W mit \mathcal{L}_α gegeben ist, dabei sei \mathcal{L}_α das bis auf Isomorphie eindeutige Linienbündel \mathcal{L}_α , das $c_1(\mathcal{L}_\alpha) = \alpha$ erfüllt. Bei dieser Operation geht das Determinanten-Linienbündel \mathcal{L} in $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_\alpha^2$ über (für weitere Details siehe [34, §3.1]).

2.1.2.4 Λ^* und die Clifford-Algebra

Das Clifford-Bündel $Cl(TX)$ ist als Vektorbündel kanonisch zu Λ^*T^*X isomorph: Wir wählen lokal einen positiv orientierten ON-Rahmen e_1, \dots, e_4 des Tangentialbündels und definieren den Isomorphismus lokal durch lineare Fortsetzung von

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \rightarrow r e_{i_1} \dots e_{i_k}$$

Diese Definition hängt jedoch nicht von der Wahl des lokalen ON-Rahmen ab und daher setzt sich obiger Isomorphismus global fort. Wir identifizieren also $Cl(TX)$ mit Λ^*T^*X . Die Clifford-Multiplikation auf Λ^*T^*X wird dann durch

$$v \cdot (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = v \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} - v \lrcorner (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \quad (2.3)$$

erzeugt, dabei bezeichnet \angle wieder die Kontraktion:

$$v\angle(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{(j-1)} \langle v, e_{i_j} \rangle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \quad (2.4)$$

Wir erhalten also:

Proposition 2.3 *Sei X eine n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Dann können wir immer annehmen, dass Elemente aus $Cl(TX) = \text{End}(W)$ durch Elemente aus $\Lambda^*T^*X \otimes \mathbb{C} \cong \Lambda^*TX \otimes \mathbb{C}$ gegeben sind. Im Falle $n = 4$, entsprechen den 1-Formen der Länge 1 Isometrien $W^+ \rightarrow W^-$ (dies gilt offensichtlich für allgemeine gerade n). \square*

Obige Identifikation von $Cl(V)$ mit $\Lambda^*V \cong \Lambda^*V^*$ geht natürlich auch im linearen Fall für beliebige n -dimensionale Vektorräume $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Für den Spezialfall $n = 4$ gilt folgende Zerlegung:

Lemma 2.4 *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein 4-dimensionaler Vektorraum. Unter der komplexen Spin-Darstellung $\rho : Cl(V) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \text{End}(S)$ wird*

$$\mathbb{C} \cdot \left(\frac{1 + \omega_{\mathbb{C}}}{2} \right) \oplus (\Lambda^{2,+}V \otimes \mathbb{C}) \subset Cl(V) \otimes \mathbb{C}$$

isomorph auf $\text{End}(S^+) \subset \text{End}(S)$ abgebildet und unter dieser Abbildung entspricht $\Lambda^{2,+}V \otimes \mathbb{C}$ genau den spurfreien Endomorphismen von S^+ .

Beweis: Nach Definition ist

$$\mathbb{C} \cdot \left(\frac{1 + \omega_{\mathbb{C}}}{2} \right) \oplus (\Lambda^{2,+}V \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} \text{End}(S) \xrightarrow{|_{S^+}} \text{End}(S^+)$$

injektiv und aus Dimensionsgründen auch surjektiv. Durch Nachrechnen, unter Zuhilfenahme der expliziten Formel (2.1) der komplexen Spin-Darstellung, sieht man sogar, dass ρ den geraden Anteil der Clifford-Algebra $Cl_0(TX)$ direkt in $\text{End}(W^+)$ abbildet und somit die Einschränkung in obiger Abbildungsverkettung nicht nötig ist. Ebenfalls mit (2.1) ergibt sich, dass selbstduale Zweiformen, unter ρ aufgefasst als Endomorphismus von $S^+ = \Lambda^{0,0}V \oplus \Lambda^{0,2}V$, den Raum $\Lambda^{0,0}$ (bzw. $\Lambda^{0,2}$) auf den Raum $\Lambda^{0,2}$ (bzw. $\Lambda^{0,0}$) abbilden (vgl. [34, §2.3, Lem. 2.3.4]). \square

2.1.3 Der $Spin^c$ -Zusammenhang und der Dirac-Operator

Wie im vorherigen Abschnitt betrachten wir eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ mit dem dazugehörigen Determinanten-Linienbündel $\mathcal{L} \rightarrow X$ und dem assoziierten Spinorbündel $W^\pm \rightarrow X$. Wir werden im folgenden einen geeigneten unitären Zusammenhang auf W und einen natürlichen Dirac-Operator konstruieren.

2.1.3.1 Der $Spin^c$ -Zusammenhang

Bevor wir den $Spin^c$ -Zusammenhang einführen, möchten wir zuerst die für uns geeigneten Konventionen für Zusammenhänge und Zusammenhangs-1-Formen festlegen. Sei hierfür M eine beliebige glatte Mannigfaltigkeit und sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit assoziiertem Prinzipalbündel $Q \rightarrow M$ und Strukturgruppe G . Ein G -Zusammenhang auf Q bzw. E ist eine kovariante Ableitung

$$\nabla : \Omega^0(M; E) \rightarrow \Omega^1(M; E),$$

die die Produktregel

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla\sigma = df \otimes \sigma$$

für eine \mathbb{R} (oder \mathbb{C})-wertige Funktion erfüllt. In einer lokalen Koordinatenumgebung U hat ∇ dann die Gestalt

$$\nabla = d + \omega,$$

mit $\omega \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$, wobei \mathfrak{g} die Lie-Algebra zu G bezeichne. Wir nennen dann ω die Zusammenhangs-1-Form.

Nun kommen wir zum $Spin^c$ -Zusammenhang. Sei hierfür $\tilde{P} \rightarrow X$ eine $Spin^c$ -Struktur über einer orientierten 4-Mannigfaltigkeit X und sei $W^\pm \rightarrow X$ das dazu assoziierte Spinorbündel. Als nächstes betrachten wir einen $U(1)$ -Zusammenhang \hat{A} auf \mathcal{L} und die Zusammenhangs-1-Form ω des Levi-Civita-Zusammenhangs, der ein $SO(4)$ -Zusammenhang auf dem von TX induzierten $SO(4)$ -Bündel $P \rightarrow X$ ist. Dieser definiert lokal in einer Kartenumgebung eine eindeutige kanonische Zusammenhangs-1-Form $\omega_{\hat{A}}$ auf dem $SO(4) \times S^1$ -Bündel $P \times_{\{\pm 1\}} \mathcal{L}$. Da $P \times_{\{\pm 1\}} \mathcal{L}$ der Quotient von \tilde{P} modulo $\{\pm 1\}$ ist, liftet sich dies zu einer eindeutigen lokalen Zusammenhangs-1-Form $\tilde{\omega}$ auf \tilde{P} . Diese lokalen Lifts setzen sich wegen der Eindeutigkeit dann zu einem globalen eindeutigen $Spin$ -Zusammenhang $\tilde{\nabla}_{\hat{A}}$ auf dem zu $\tilde{P} \rightarrow X$ assoziierten Spinorbündel $W \rightarrow X$ zusammen. Bezüglich einer lokalen ON-Basis e_1, \dots, e_4 von TX gilt für $\tilde{\nabla}_{\hat{A}}$ (vgl. [34, §3.2])

$$\tilde{\nabla}_{\hat{A},e}(\sigma)(u) = \left(u, \frac{ds(u)}{de} + \frac{1}{2} \left(i\hat{A}(e) + \sum_{i < j} \langle \omega(e) e_i, e_j \rangle e_i e_j \right) \cdot s(u) \right) \quad (2.5)$$

Wobei σ ein Schnitt $u \rightarrow (u, s(u))$ in W bezüglich dieser Trivialisierung ist.

Definition 2.2 Wir verwenden für einen $Spin^c$ -Zusammenhang des Bündels W die Schreibweise A oder ∇_A anstatt $\nabla_{\widehat{A}}$. Dann sei \widehat{A} als der von A bzw. ∇_A induzierten $U(1)$ -Zusammenhang $\det(\nabla_A^{\text{End}(W^+)})$ auf dem Determinanten-Linienbündel \mathcal{L} definiert.

2.1.3.2 Der Dirac-Operator

Der $Spin^c$ -Zusammenhang $A = \widetilde{\nabla}_{\widehat{A}}$ definiert einen von dem $U(1)$ -Zusammenhang \widehat{A} oder direkt von A abhängigen Dirac-Operator D_A lokal durch

$$D_A : C^\infty(W^\pm) \rightarrow C^\infty(W^\mp),$$

$$D_A(\sigma)(x) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{\widehat{A}, e_i}(\sigma)(x) \quad (2.6)$$

dabei sei (e_1, \dots, e_n) eine lokale ON-Basis in einer Umgebung von $T_x X$ und \cdot die Clifford-Multiplikation. Diese Definition hängt jedoch nicht von der Wahl von (e_1, \dots, e_n) (siehe [34, §3.3]) ab und somit setzt sich D_A mittels obiger lokaler Formel eindeutig zu einem globalen Operator fort.

Lokal kann man unter Verwendung von (2.5) folgende explizite Formel für den linearen Operator erster Ordnung D_A angeben:

$$D_A(\sigma)(u) = \sum_l e_l \cdot \frac{ds(u)}{de} + \frac{1}{2} \sum_l \left(\widehat{A}(e_l) e_l + \sum_{j < k} \langle \omega(e_l) e_l, e_k \rangle (e_l e_j e_k) \right) \cdot s(u) \quad (2.7)$$

Lemma 2.5 Seien A und $A' = A + a$ mit $a \in C^\infty(iT^*X)$ zwei $Spin^c$ -Zusammenhänge der $Spin^c$ -Struktur $\widetilde{P} \rightarrow X$, dann gilt für den Dirac-Operator und jeden Schnitt $\psi \in C^\infty(W)$ die Identität

$$D_{A+a}(\psi) = D_A + \rho(a) \cdot \psi.$$

Für die Krümmung des Zusammenhangs \widehat{A}' auf dem Determinanten-Linienbündel gilt dann

$$F_{\widehat{A+a}} = F_{\widehat{A}} + 2da.$$

Weiterhin sei $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, dann gilt die Produktregel

$$D_A(u\psi) = \rho(du) \cdot \psi + uD_A\psi.$$

Beweis: Dies ist eine einfache Konsequenz aus (2.7). \square

Für den Dirac-Operator D_A gilt eine spezielle Weitzenböckformel, die ursprünglich von Schrödinger stammt und als Spezialfall der Bochner-Weitzenböck-Lichnerowicz-Formel angesehen werden kann. Diese bringt für D_A^2 geometrische Daten in Form von Krümmungstermen ins Spiel:

Lemma 2.6 *Der Operator D_A erfüllt*

$$D_A^2(\phi) = \nabla_A^* \nabla_A(\phi) + \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \rho(F_A^+) \cdot \phi. \quad (2.8)$$

Beweis: Einen ausführlichen Beweis findet man in [34, §5.1, Prop 5.1.5]. \square

2.1.4 Die SW-Gleichungen und der Modulraum

Dieser Abschnitt entspricht einer kurzen Zusammenfassung von Kapitel 4 aus [34]. Wir werden die Seiberg-Witten-Gleichungen formulieren und erklären, welcher Konfigurations- und welcher Eichraum unseren Betrachtungen zugrunde liegen werden. Mit diesen Vorbereitungen ausgestattet, können wir dann einen Modulraum definieren, der die Grundlage für die Seiberg-Witten-Invariante bildet.

2.1.4.1 Die SW-Gleichungen

Die Seiberg-Witten-Gleichungen sind Gleichungen für einen Spinor $\psi \in C^\infty(W^+)$ und einem $Spin^c$ -Zusammenhang A . Die Gleichungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \rho(F_A^+) &= q(\psi) = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2} Id \\ D_A(\psi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dabei bezeichnet $F_A^+ \in \Lambda^{2,+} T^*X \otimes i\mathbb{R}$ den selbstdualen Anteil der Krümmung des $U(1)$ -Zusammenhangs \hat{A} auf \mathcal{L} . Der Ausdruck $q(\psi)$ stellt einen spurfreien Endomorphismus von W^+ dar und ist somit wegen der Zerlegung von $End(W^+)$ aus Lemma 2.4 unter ρ^{-1} ein Element aus $\Lambda^{2,+} TX \otimes \mathbb{C}$.

Bemerkung 2.7 Nach [34, §4.1] ist der Ausdruck $q(\psi)$ sogar rein imaginär und somit ein Element aus $\Lambda^{2,+} TX \otimes i\mathbb{R}$. Die Krümmungsgleichung aus (2.9) kann also als eine Gleichung für Schnitte in $isu(W^+)$ aufgefasst werden.

2.1.4.2 Der Konfigurationsraum

Um einen Modulraum zu erhalten, müssen wir zunächst einen Konfigurationsraum definieren. Dies ist der Raum aller Paare (A, ψ) , wobei A ein $Spin^c$ -Zusammenhang der $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ und ψ ein Schnitt in W^+ sei. Aus technischen Gründen werden wir keine glatten Zusammenhänge und glatten Schnitte verwenden, sondern auf allgemeinere Banach- bzw. Hilberträumen ausweichen. Wir definieren $\mathcal{A}_{L_2^2}$ als den Raum aller L_2^2 -Zusammenhänge und $L_2^2(W^+)$ als den Raum aller L_2^2 -Schnitte in W^+ . Auf diese Weise ergibt sich der Konfigurationsraum $\mathcal{C}(\tilde{P})$ als

$$\mathcal{C}(\tilde{P}) = \mathcal{A}_{L_2^2} \times L_2^2(W^+).$$

Die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen, die den Modulraum bilden, werden jedoch immer einen C^∞ -Eichrepräsentant besitzen (siehe [34, §5.2]).

2.1.4.3 Die Eichtransformation

Zusätzlich möchten wir die Gruppe der Eichtransformationen betrachten, welche die Menge der Lösungen der SW-Gleichungen invariant lässt, d.h. dass durch eine solche Transformation eine Lösung in eine andere überführt wird. Die Eichgruppe $\mathcal{G}(\tilde{P})$, die eine Hilbertmannigfaltigkeit ist, definieren wir durch

$$\mathcal{G}(\tilde{P}) = L_3^2(S^1).$$

Die Aktion eines Elementes $\sigma \in \mathcal{G}(\tilde{P})$ auf ein Element $(A, \psi) \in \mathcal{C}$ ist durch

$$(A, \psi) \cdot \sigma = ((\sigma^{-1})^* A, \sigma \psi)$$

gegeben, dabei operiere σ auf W durch punktweises Multiplizieren.

Satz 2.8 *Die Eichgruppe $\mathcal{G}(\tilde{P})$ ist eine unendlich dimensionale Hilbert-Lie-Gruppe, die als Gruppenoperation punktweises Multiplizieren hat. Die Operation von $\mathcal{G}(\tilde{P})$ auf $\mathcal{C}(\tilde{P})$ ist aufgrund des Sobolev-Multiplikations-Theorems eine glatte Operation (siehe [34, §4.3, §4.4]).* \square

Viele globale Eigenschaften des Modulraums und die Definition der Seiberg-Witten-Invariante lassen nur Konfigurationen ohne Stabilisator zu:

Definition 2.3 Wir nennen ein Element $(A, \psi) \in \mathcal{C}$ **irreduzibel**, wenn $\psi \neq 0$ ist. Wir setzen $\mathcal{C}^*(\tilde{P}) \subset \mathcal{C}(\tilde{P})$ als die Teilmenge aller irreduzibler Konfigurationen.

2.1.4.4 Der SW-Modulraum

Betrachten wir nun das Seiberg-Witten-Funktional

$$F : \mathcal{C}(\tilde{P}) \rightarrow L_1^2((\Lambda^{2,+}T^*X \otimes i\mathbb{R}) \oplus W^-),$$

das durch

$$F(A, \psi) = (F_A^\pm - q(\psi), D_A(\psi)) \quad (2.10)$$

gegeben ist, dann gilt für alle $\sigma \in \mathcal{G}(\tilde{P})$, dass F mit σ im Sinne von $F((A, \psi) \cdot \sigma) = F(A, \psi) \cdot \sigma$ vertauscht (vgl. [34, §4.4]), wobei die Aktion von σ auf dem $i\Lambda^{2,+}T^*X$ -Anteil die Identität (also trivial) sei.

Dies erlaubt es uns, dass wir uns auf den Quotientenraum

$$\mathcal{B}(\tilde{P}) = \mathcal{C}(\tilde{P})/\mathcal{G}(\tilde{P})$$

zurückziehen.

Folgende wichtige Eigenschaft nennt man auch 'Basic-Convergence-Lemma', dessen Beweis man in [34, §4.5] findet:

Lemma 2.9 *Seien (a_n, ψ_n) und (b_n, μ_n) gegen (a, ψ) bzw. (b, μ) konvergente Folgen in \mathcal{C}^* . Weiterhin existiere $\sigma_n \in \mathcal{G}(\tilde{P})$ mit*

$$(a_n, \psi_n) \cdot \sigma_n = (b_n, \mu_n),$$

dann konvergiert eine Teilfolge der σ_n gegen ein $\sigma \in \mathcal{G}(\tilde{P})$ und es gilt

$$(a, \psi) \cdot \sigma = (b, \mu).$$

□

Korollar 2.10 *Der Quotientenraum $\mathcal{B}(\tilde{P})$ ist ein Hausdorff-Raum.* □

Ebenso analog zu [34, §4.5] folgt aus dem Basic-Convergence-Lemma, dass man $\mathcal{C}^*(\tilde{P})$ lokal in 'Slices' zerlegen kann. Das heisst, zu jedem $x \in \mathcal{C}^*$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathcal{C}^*$ und einen lokalen Slice $S \subset \mathcal{C}^*$, der eine geschlossene Hilbert-Untermannigfaltigkeit ist, so dass vermöge Multiplikation

$$S \times_{\text{Stab}(x)} \mathcal{G} \xrightarrow{\cong} U$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aus diesem Slice-Theorem folgt dann, dass der Teilraum

$$\mathcal{B}^*(\tilde{P}) = \mathcal{C}^*(\tilde{P})/\mathcal{G}(\tilde{P})$$

eine *Hilbert-Mannigfaltigkeit* ist.

Definition 2.4 *Der Modulraum $\mathcal{M}(\tilde{P})$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von Lösungen der SW-Gleichungen (2.9) aus $\mathcal{B}(\tilde{P})$ bzw. der Modulraum $\mathcal{M}^*(\tilde{P})$ die Menge aller Äquivalenzklassen irreduzibler Lösungen aus $\mathcal{B}^*(\tilde{P})$.*

Aus a priori Abschätzungen an die Krümmung und an die Lösungen (A, Φ) der Seiberg-Witten-Gleichungen kann man schließen, dass der Modulraum $\mathcal{M}(\tilde{P}) \subset \mathcal{B}(\tilde{P})$ kompakt ist (siehe [34, §5.3]). In den Fällen, in denen die Linearisierung der SW-Gleichungen mit entsprechender Eich-Fixierung an jeder Lösung surjektiv ist, ist $\mathcal{M}^*(\tilde{P})$ glatt und endlich-dimensional (siehe [34, §4.6]) und sein Dimension berechnet sich mittels

$$d = (c_1(\mathcal{L}^2) - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))/4.$$

Für die Dimensionsberechnung nutzt man aus, dass der Fredholm-Index der Linearisierung der SW-Gleichungen mit entsprechender Eich-Fixierung gleich der formalen Dimension des Modulraums ist.

Den Modulraum $\mathcal{M}^*(\tilde{P}) \subset \mathcal{B}^*(\tilde{P})$ ist sogar orientierbar ([34, §6.6]).

2.1.5 Die SW-Invariante

In diesem Abschnitt wollen wir voraussetzen, dass $b_2^+(X) > 1$ gilt. Im allgemeinen gibt es keinen Grund, dass der Modulraum eine glatte Mannigfaltigkeit bildet, jedoch kann man dies durch eine generische Perturbation der Gleichungen erreichen. Man perturbiert die SW-Gleichungen mit einer selbst-dualen 2-Form $h \in C^\infty(\Lambda^{2,+})$ zu

$$\begin{aligned} F_A^+ &= q(\psi) + ih \\ D_A(\psi) &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Der Modulraum dieser Gleichungen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\tilde{P}, h)$. Man kann auch den dazu assoziierten parametrisierten Modulraum $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{P})$ betrachten, welcher aus der Vereinigung aller $(\mathcal{M}(\tilde{P}, h), h)$ besteht und eine unendlich dimensionale glatte Mannigfaltigkeit bildet (siehe [34, §6.2]).

Geht man zu generischen Perturbation h über, dann gilt sogar, dass die Fasern $\mathcal{M}(\tilde{P}, h)$ des parametrisierten Modulraums glatte kompakte Untermannigfaltigkeiten von $\mathcal{B}^*(\tilde{P})$ sind und, wie im Falle der unperturbierten Gleichungen, die Dimension

$$d(\mathcal{L}) = (c_1(\mathcal{L}^2) - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))/4 \tag{2.12}$$

haben. Falls der Ausdruck (2.12) negativ ist, bedeute dies, dass für ein generisches h der Modulraum $\mathcal{M}(\tilde{P}, h)$ leer ist (vgl. [34, §6.1 ff.]).

Sei $x \in X$ ein beliebiger Basispunkt, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}$ alle Eichtransformationen $\sigma : X \rightarrow S^1$, die $\sigma(x) = 1$ erfüllen. Dies ist der Kern der Abbildung

$$\mathcal{G} \rightarrow S^1 : \sigma \rightarrow \sigma(x).$$

Daher existiert ein S^1 -Prinzipalbündel über $\mathcal{B}^*(\tilde{P})$, das durch den Totalraum $\mathcal{C}^*/\mathcal{G}^0$ gegeben ist. Sei $\mu \in H^2(\mathcal{B}^*; \mathbb{Z})$ die erste Chern-Klasse dieses S^1 -Bündels, dann hängt $\mu \in H^2(\mathcal{B}^*; \mathbb{Z})$ nicht von der Wahl des Basispunktes $x \in X$ ab, denn: Sei $x' \in X$ ein anderer Basispunkt und $\mathcal{G}^{0'} \subset \mathcal{G}$ die Menge aller Eichtransformationen σ , die $\sigma(x') = 1$ erfüllen, dann ist $\sigma(\cdot) \rightarrow \sigma(x')^{-1}\sigma(\cdot)$ ein Isomorphismus $\mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^{0'}$, der einen Isomorphismus zwischen den entsprechenden S^1 -Bündel induziert.

Falls die Dimension $d(\mathcal{L}) = (c_1(\mathcal{L}^2) - 2\chi(X) - 3)$ gerade, also etwa gleich $2d'$ ist, definieren wir die SW-Invariante der $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ als

$$SW(\tilde{P}) = \int_{\mathcal{M}(\tilde{P}, h)} \mu^{d'} \quad (2.13)$$

mit einem generischen h , so dass $\mathcal{M}(\tilde{P}, h)$ glatt ist. Andernfalls setzen wir $SW(\tilde{P}) = 0$.

Die Definition von $SW(\tilde{P})$ ist in dem von uns betrachteten Fall, in dem $b_2^+(X) > 1$ gilt, unabhängig von der gewählten generischen Perturbation h und unabhängig von der Wahl der Riemannschen Metrik auf X und ist somit **eine Invariante der $Spin^c$ -Struktur** (vgl. [34, §6.7]).

Bemerkung 2.11 *Insbesondere folgt für generische Perturbationen h , dass Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichungen existieren, falls $SW \neq 0$ ist.*

2.2 Fast komplexe Strukturen und 2-Felder

Wir beobachten eine Beziehung zwischen fast komplexen Strukturen und $Spin^c$ -Strukturen auf orientierten Riemannschen 4-Mannigfaltigkeiten, die in folgender Proposition festgehalten ist.

Proposition 2.12 *Auf einer orientierten Riemannschen 4-Mannigfaltigkeit (X, g) gibt es eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen folgenden Objekten:*

1. *kompatible fast komplexe Strukturen J ,*
2. *(glatte) selbst-duale 2-Formen ω der euklidischen Länge $\sqrt{2}$, und*

3. Isomorphieklassen von (\tilde{P}, Φ) , bestehend aus einer Spin^c -Struktur \tilde{P} und einem Schnitt Φ der Länge 1 im assoziierten Halb-Spinor-Bündel W^+ .

Beweis:

1 \rightarrow 2: Sei J eine solche kompatible fast komplexe Struktur. Wir setzen mit

$$\omega = \langle \cdot, J\cdot \rangle \quad (2.14)$$

an. Sei $U \subset X$ eine beliebige lokale Kartenumgebung. Da J zur Metrik kompatibel ist, existiert lokal auf U eine ON-Basis e_1, e_2, e_3, e_4 von TX , so dass $Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$ gilt. Nach (2.14) gilt $w|_U = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \in \Lambda^{2,+}$. Dies impliziert dann, dass $w|_U$ eine selbst-duale 2-Form der Länge $\sqrt{2}$ ist. Man bemerke, dass für eine 1-Form $\theta \in \Lambda^1 T^*X$

$$J\theta = - * (\omega \wedge \theta) \quad (2.15)$$

gilt, was uns im folgenden Schritt 2 \rightarrow 1 nützlich sein wird.

2 \rightarrow 1 und 2 \leftrightarrow 1: Wir verwenden (2.15) für die Rückrichtung um aus einer selbstdualen 2-Form ω der Länge $\sqrt{2}$ eine kompatible fast komplexe Struktur zu konstruieren. Da dies invers zur Konstruktion aus 1 \leftarrow 2 ist, bleibt für die eins-zu-eins Korrespondenz von 1. und 2. lediglich zu zeigen, dass (2.15) tatsächlich eine kompatible fast komplexe Struktur definiert.

Sei in einer Kartenumgebung $U \subset X$, e_1, \dots, e_4 eine lokale ON-Basis von TX . Für einen beliebigen 4-dimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt wird $\Lambda^{2,+}V$ durch $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$, $e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$ und $e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3$ aufgespannt. Daraus erkennen wir, dass man durch einen positiven Basiswechsel (lokal) $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ erreichen kann. Setzt man für θ die Elemente e^1, \dots, e^4 in (2.15) ein, rechnet man aus, dass $Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$ gilt.

3 \rightarrow 1: Als erstes erklären wir, wie man aus einem Paar (\tilde{P}, Φ) eine kompatible fast komplexe Struktur J konstruiert. Dies werden wir durch Pullback der Multiplikation mit i auf W erreichen: Es bezeichne wieder $\rho : \Lambda^* T^*X \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$ die (komplexe) Spin-Darstellung (vgl. §2.1.2.4). Dies induziert überall lokal einen Isomorphismus $\rho' : T^*X \xrightarrow{\cong} W^-$ vermöge

$$\rho' : \theta \rightarrow \rho(\theta) \cdot \Phi.$$

Dies ist in der Tat ein Isomorphismus, da T^*X und W^- (faserweise) dieselbe Dimension haben und da wegen der Clifford-Relation $\rho(\theta)^2 = -\text{Id}\|\theta\|^2$ die Abbildung ρ' injektiv sein muss.

Jetzt können wir J als Pullback der Multiplikation mit i auf W definieren:

$$J\theta = (\rho')^{-1}(i\rho(\theta) \cdot \Phi) \quad (2.16)$$

Daraus geht sofort hervor, dass J eine wohldefinierte lineare Abbildung ist und $J^2 = -1$ erfüllt. Um zu sehen, dass J kompatibel ist, erinnere man sich, dass die Abbildung ρ auf den 1-Formen eine Isometrie ist (siehe Proposition 2.3).

1 \rightarrow 3: Sei andererseits eine kompatible fast komplexe Struktur wie in 3. gegeben. Wir wählen zunächst Kandidaten für die Spinorbündel. Die Definition der komplexen Spin-Darstellung in §2.1.2 hat die fast komplexe Struktur des \mathbb{R}^4 verwendet und $S^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ und $S^- = \Lambda^{0,1}$ ergeben. Da wir nun eine fast komplexe Struktur von X zur Verfügung haben, können wir folgende lokale Darstellung als globalen Ansatz verwenden:

$$W^+ = \Lambda^{0,0}T^*X \oplus \Lambda^{0,2}T^*X \text{ und } W^- = \Lambda^{0,1}T^*X$$

Die komplexe Spin-Darstellung $\rho : \Lambda^*T^*X \rightarrow \text{End}(W)$ ist dann für $\theta \in T^*X, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^*T^*X$ und mit

$$\pi_{0,1}(\theta) = \frac{1}{2}(\theta + iJ\theta)$$

als Projektion auf den $(0, 1)$ -Anteil von θ durch

$$\rho(\theta) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sqrt{2}(\pi_{0,1}(\theta) \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) - \pi_{0,1}(\theta) \lrcorner (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)) \quad (2.17)$$

gegeben, dabei bezeichne \lrcorner die Kontraktion aus (2.2) bezüglich der eindeutigen hermiteschen Metrik auf Λ^1T^*X , die die ursprüngliche euklidische Metrik fortsetzt und komplex linear im ersten Faktor ist. Das ergibt in der Tat die, bis auf Isomorphie, eindeutige irreduzible komplexe Spin-Darstellung, die wir aus (2.1) kennen und wegen dem Übergang zum Cotangentialbündel diese modifizierte Gestalt hat (vgl. [34, §3.4, Cor. 3.4.5/6] und [22, §1.8]). Wir haben durch obige Darstellung eine punktweise Operation von $Spin^c(4) \subset (Cl(T^*X) \otimes \mathbb{C})_x$ in $End(W)$, welche nicht von der Wahl der lokal gewählten ON-Basis abhängt. Tatsächlich haben wir also eine globale Operation von $Spin^c(4)$ auf dem Bündel $W^+ \oplus W^- \rightarrow X$. Die gesuchte $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ ist dann einfach das zu $W = W^+ \oplus W^-$ assoziierte $Spin^c(4)$ -Strukturgruppen-Bündel und hat das Determinatenlinienbündel $det(W^+)$, das zum kanonischen Linienbündel der $(0, 2)$ -Formen isomorph ist. Zuletzt wählen wir Φ als den konstanten 1-Schnitt in $\Lambda^{0,0}T^*X$. Wir beobachten wegen der Formel (2.17) für die komplexe Spin-Darstellung, dass J der Pullback von der Multiplikation mit i unter ρ ist. Dies, zusammen mit der Eindeutigkeit der komplexen Spin-Darstellung, beweist, dass unsere Konstruktionen 1 \rightarrow 3 und 3 \rightarrow 1 zueinander invers sind. \square

Definition 2.5 Unter den Voraussetzungen von Proposition 2.12 und einer gegebenen fast komplexen Struktur bzw. einer gegebenen selbst-dualen 2-Form der Länge $\sqrt{2}$, nennen wir die aus der Konstruktion von Proposition 2.12 erhaltenen $Spin^c$ -Struktur \tilde{P}_0 , die *kanonische* $Spin^c$ -Struktur und den dazu erhaltenen Spinor Φ_0 der konstanten Länge 1 den *kanonischen* Spinor zur $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} .

Wenn wir uns in einer Situation wie in obiger Definition befinden, interessieren wir uns für den Ausdruck $D_A(\Phi_0)$ für einen zunächst beliebigen $Spin^c$ -Zusammenhang A von \tilde{P}_0 . Die explizite lokale Formel (2.7) für D_A vereinfacht sich nun aufgrund der Tatsache, dass Φ_0 der konstante 1-Schnitt in $\Lambda^{0,0}T^*X$ ist und somit keine Ableitung hat, zu

$$D_A(\Phi_0)(u) = \frac{1}{2} \sum_l \left(\hat{A}(e_l)\rho(e^l) + \sum_{j < k} \omega_{k,j}(e_l)(\rho(e^l)\rho(e^j)\rho(e^k)) \right) \cdot \Phi_0. \quad (2.18)$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2} \sum_l \hat{A}(e_l)\rho(e^l) \cdot \Phi_0$ ist aber gleich dem Ausdruck $\rho(\hat{A}) \cdot \Phi_0$. Ebenso wissen wir, dass die im Beweis von Proposition 2.12 vermöge

$$\theta \rightarrow \rho(\theta) \cdot \Phi_0$$

definierte Abbildung ρ' (und so auch $i\rho'$) überall lokal ein Isomorphismus ist. Mit (2.18) folgt dann, dass überall lokal ein *eindeutiger* $Spin^c$ -Zusammenhang A_0 existiert, der $D_{A_0}\Phi_0 = 0$ erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit existiert dieser global. Wir haben also gezeigt:

Proposition 2.13 *Falls die $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} über einer orientierten Riemannschen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit durch eine fast komplexe Struktur induziert wird, dann gibt es einen eindeutigen $Spin^c$ -Zusammenhang A_0 , der*

$$D_{A_0}\Phi_0 = 0$$

erfüllt.

Definition 2.6 Einen $Spin^c$ -Zusammenhang A_0 wie in obiger Proposition nennen wir, den von (\tilde{P}, Φ_0) induzierten *kanonischen* $Spin^c$ -Zusammenhang.

Sei (Y, g) eine orientierbare Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit, dann erhalten wir, durch zu Proposition 2.12 analoge Überlegungen, auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times Y$ folgendes Ergebnis:

Proposition 2.14 *Auf einer orientierten Riemannschen 3-Mannigfaltigkeit (Y, g) gibt es eine eins-zu-eins Korrespondenz zwischen folgenden Objekten:*

1. (glatte) orientierte 2-Ebenen Felder ξ ,
2. (glatte) 1-Formen θ der Länge 1, und
3. Isomorphieklassen von (\tilde{P}, Φ) , bestehend aus einer $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} und einem Schnitt Φ der Länge 1 im assoziierten Spinor-Bündel W .

Beweis: $1 \leftrightarrow 2$: Sei ein orientiertes 2-Ebenen Feld ξ gegeben. Dann definieren wir θ als das Duale zum Normalenvektorfeld von ξ , das dann $\theta|_{\xi} \equiv 0$ erfüllt.

Sei umgekehrt eine 1-Form θ der Länge 1 gegeben, dann ist unser Kandidat für ξ der Kern von θ : Wir wählen an jedem Punkt $y \in Y$, $\xi_y = \ker(\theta_y)$. Dies definiert auf natürliche Weise ein 2-Ebenen-Feld. Betrachtet man ϑ als das zu θ duale Vektorfeld, dann hat dieses konstante Länge 1 und ist $\notin \xi$. Die richtige Orientierung auf ξ erhalten wir auf folgende Weise: Seien $e_1, e_2 \in \xi_y$ an einem Punkt $y \in Y$, dann sei (e_1, e_2) genau dann positiv orientiert, wenn $(\vartheta_y, e_1, e_2)_p$ in TY positiv orientiert ist. Dies definiert eine Orientierung auf ξ . Somit ist die behauptete Bijektion zwischen 1. und 2. gezeigt.

$3 \rightarrow 2$: Sei ein Paar (\tilde{P}, Φ) wie in 3. gegeben. Wir betrachten Y als $\{0\} \times Y \subset \mathbb{R} \times Y$ eingebettet. Sei g die ursprüngliche Metrik auf Y , dann wählen wir die Produktmetrik $g + dt^2$ auf $\mathbb{R} \times Y$. Wir staten den Zylinder mit der Produktorientierung aus (also so, dass $\partial/\partial t$ ein positiv orientiertes Normalenfeld an $\{0\} \times Y$ ist). Weiterhin sei wie in §2.1.2.2 die $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} der Pullback einer entsprechenden translationsinvarianten 4-dimensionalen $Spin^c$ -Struktur auf $\mathbb{R} \times Y$. Dann ist nach der Konstruktion der $Spin^c$ -Struktur und des Spinorbündel (vgl. §2.1.2) der Schnitt Φ ein nicht verschwindender Schnitt im neuen Bündel $W^+ \rightarrow \mathbb{R} \times Y$, was isomorph zum Spinorbündel $W \rightarrow Y$ ist. Nach Proposition 2.12 gibt es eine zur Metrik kompatible fast komplexe Struktur J auf $\mathbb{R} \times Y$. Wir setzen nun bezüglich dieser fast komplexen Struktur

$$\theta = ((2dt)^{0,1})|_{TY}.$$

Nach der Wahl der Metrik ist θ eine 1-Form der konstanten Länge 1 in $\Lambda^1 T^*Y$.

$1, 2 \rightarrow 3$: Sei θ beliebig vorgegeben und sei ξ das dazu assoziierte 2-Ebenen-Feld aus $1 \leftrightarrow 2$. Sei weiterhin $\mathbb{R} \times Y$ der Zylinder wie in $3 \rightarrow 2$. Wir wählen die beliebige kompatible fast komplexe Struktur J für ξ , indem wir für $e \in \xi$ mit $\|e\| = 1$ definieren, dass (e, Je) an jedem Punkt eine positiv orientierte ON-Basis von ξ sein soll. Aufgrund der Orientierung von ξ und $\dim(\xi) = 2$ ist dies an jedem Punkt auf eindeutige Weise möglich und belegt daher die globale Existenz eines solchen J , dass dann automatisch $J^2 = -1$ erfüllt. Wir setzen J durch $J\theta = -dt$ auf ganz $\mathbb{R} \times Y$ fort. Nun liefert uns Proposition 2.12 eine $Spin^c$ -Struktur auf $Y \times \mathbb{R}$, welche wir durch Pullback (siehe §2.1.2) auf Y

zu einer $Spin^c$ -Struktur auf Y machen. Der gesuchte Spinor der konstanten Länge 1 ist der aus Proposition 2.12 erhaltene Spinor Φ , der durch Pullback auf Y zu einem Spinor in $W \rightarrow Y$ gemacht wird.

1, 2 \leftrightarrow 3: Da bei der Konstruktion $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ die 1-Form θ nach $(\theta - idt)|_{TY} = \theta$ übergeht und bei $3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ die fast komplexe Struktur auf dem Zylinder unverändert bleibt, erklärt dies die Bijektion. \square

Kapitel 3

Eine spezielle Seiberg-Witten-Theorie

Motiviert durch das Ziel, die Endlichkeitsaussage über (semi-)füllbare Kontaktstrukturen zu beweisen, widmen wir uns in diesem Kapitel kompakten orientierten 4-Mannigfaltigkeiten mit einem Kontaktrand (vgl. Definition 1.4). Um den schwer zugänglichen Rand in den Griff zu bekommen, ersetzen wir ihn durch ein Kegelende, auf dem die Krümmung und alle ihre Ableitungen hinreichend stark abfallen. Ebenso erreichen wir auf diesem Kegelende, dass der Injektivitätsradius mit steigender t -Koordinate gegen unendlich geht. Auf diese Weise erhalten wir auf dem Kegelende eine approximativ flache Struktur, die uns später geeignete Sobolev-Räume liefern wird, auf denen wir dann Fredholm-Theorie betreiben können.

Mit Hilfe der vorausgesetzten Kontaktstruktur auf dem Rand, können wir eine symplektische (und so auch eine fast komplexe) Struktur auf dem Kegelende angeben. Dies induziert, wie im vorherigen Kapitel gesehen, auf dem Kegelende eine kanonische $Spin^c$ -Struktur mit kanonischem Spinor und kanonischem $Spin^c$ -Zusammenhang. Diese Daten werden unsere geeigneten Sobolev-Rand-Bedingungen des Konfigurationsraums auf dem Kegelende sein.

Der erste Abschnitt erklärt die Konstruktion des Kegelendes und den Spielraum für fast komplexe Strukturen und Metriken, die wir auf diesem zulassen wollen. Anschließend wird der nächste Abschnitt die geeigneten Sobolev-Räume für die Konfigurationen und die Eichtransformationen mit entsprechenden Randbedingungen einführen. Damit können wir dann die Seiberg-Witten-Gleichungen in diesem Kontext neu formulieren. Danach werden wir

die SW-Gleichungen mit entsprechender Eich-Fixierung linearisieren und eine Fredholm-Theorie entwickeln, um dann zu den wesentlichen Eigenschaften des Modulraums zu kommen, z.B. dass dieser generisch eine glatte kompakte endlich dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Zuletzt kümmern wir uns um den Spezialfall, dass die symplektische Struktur auf dem Kegelerde eine globale Fortsetzung besitzt, was im darauffolgenden Kapitel mit dem Fall der symplektischen Füllbarkeit gleichgesetzt werden kann. Motiviert durch den geschlossenen Fall, in dem, falls eine symplektische Struktur existiert, $SW = 1$ gilt (vgl. [44]), endet der letzte Abschnitt mit dem für das nächste Kapitel zentrale Ergebnis, dass in diesem Fall der SW-Modulraum in unserem Fall generisch nicht leer ist.

3.1 Ersetzen des Randes ∂X durch ein Kegelerde

Sei X eine kompakte zusammenhängende orientierte 4-Mannigfaltigkeit, die einen nicht leeren Rand ∂X hat. Wir fordern dabei nicht zwingend, dass der Rand zusammenhängend ist. Sei ξ eine zur Orientierung kompatible Kontaktstruktur auf dem Rand ∂X , so dass $(\partial X, \xi)$ ein orientierter Kontaktrand von X ist (siehe Definition 1.4). Wir werden aus diesen Daten nun eine Mannigfaltigkeit X^+ mit $X \subset X^+$ konstruieren, die eine symplektische Struktur ω_0 auf $X^+ \setminus X$ trägt, die zu ξ auf ∂X kompatibel ist (vgl. Definition 1.4). Für den Beweis der Endlichkeitsaussage im nächsten Kapitel wird diese explizit konstruierte symplektische Form und Metrik leicht stören müssen. Diese 'milde' Störung wird aber die wichtigsten Eigenschaften des Kegeldes nicht zerstören.

Zuerst wählen wir als

$$X^+ = X \cup_{\partial X} ([1, \infty) \times \partial X).$$

Wir setzen also den Rand ∂X auf einem Zylinder fort. Nun müssen wir noch eine Metrik g_0 und eine symplektische Struktur ω_0 auf $[1, \infty) \times \partial X$ wählen. Die Wahl der Metrik wird aus dem Zylinderende ein Kegelerde machen.

Wir wählen wie im Beweis von Proposition 2.14 die 1-Form θ als das Duale zum positiven Normalenfeld von ξ auf ∂X . Die 1-Form θ hat dann als Kern das 2-Ebenen-Feld ξ . Ebenso analog zum Beweis von Proposition 2.14 wählen wir eine kompatible fast komplexe Struktur J auf ξ .

Da ξ eine zur Orientierung kompatible Kontaktstruktur ist, gilt, dass $\theta \wedge d\theta$ eine Volumenform ist. Wir wählen nun eine Metrik g_1 auf ∂X , die folgende Eigenschaften besitzt:

- θ hat euklidische Länge 1,
- $d\theta = 2(*\theta)$ und
- J ist auf ξ eine Isometrie.

Insbesondere bedeutet dies, dass es an jedem Punkt $y \in Y$ eine ON-Basis (e_1, e_2, e_3) von TY gibt, deren dualen Basis (e^1, e^2, e^3) von T^*Y folgendes erfüllt:

- $\theta = e^1$,
- $d\theta = 2e^2 \wedge e^3$ und
- $Je^2 = -e^3$.

Dies ist aus folgendem Grund möglich: Da $\theta \wedge d\theta$ eine Volumenform ist, wählt man die Metrik derart, dass $\theta \lrcorner d\theta = 0$ und J eine Isometrie ist, dabei gewichtet man die Metrik auf ξ derart, dass die 2-Form $d\theta$ die euklidische Länge 2 hat.

Nun wählen wir für eine Konstante $R > 1$ die symplektische Form ω_0 auf $[1, \infty) \times \partial X$ durch

$$\omega_0 = \frac{1}{2R}d(t^2\theta) = \frac{1}{R}tdt \wedge \theta + \frac{1}{2R}t^2d\theta \tag{3.1}$$

und die Metrik g_0 durch

$$g_0 = R^2dt^2 + R^2t^2g_1. \tag{3.2}$$

Durch Nachrechnen verifiziert man sofort, dass ω_0 die Länge $\sqrt{2}$ hat und $*\omega_0 = \omega_0$ erfüllt. Die Daten ω_0 und g_0 bilden also ausserhalb einer kompakten Menge eine symplektische Struktur. Wir wollen die Konstante $R > 1$ erst einmal unbestimmt lassen und treffen die Konvention, dass sie oBdA. immer hinreichend groß gewählt sei.

Jetzt wählen wir noch eine beliebige Fortsetzung von g_0 auf ganz X^+ , z.B. lässt man die ursprüngliche Metrik auf X und die auf dem Kegelende in einer Tuben-Umgebung von $\{1\} \times \partial X$ ineinander übergehen.

Da wir auf dem Kegelende $[1, \infty) \times \partial X$ eine selbst-duale 2-Form ω_0 der (konstanten) Länge $\sqrt{2}$ haben, bekommen wir dort durch Proposition 2.12 eine induzierte kompatible fast komplexe Struktur J , die mit dem oben eingeführten J übereinstimmt und eine induzierte $Spin^c$ -Struktur \tilde{P}_0 besitzt. Die zentralen Eigenschaften des soeben konstruierten Kegelendes sind in folgender Proposition festgehalten.

Proposition 3.1 (i) X^+ ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nach unten beschränktem Injektivitätsradius $\text{inj}(\cdot)$, d.h.: Es existiert ein $K > 0$, so dass für alle $x \in X^+$ gilt, dass $\text{inj}(x) \geq K$ ist.

(ii) Der Injektivitätsradius als Funktion der t -Koordinate geht für $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich.

(iii) Weiterhin gilt, dass die punktweise Norm der Krümmung

$$F \in \Omega^2(\text{End}(TX^+))$$

des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ entlang dem Kegelende $\partial X \times [1, \infty)$ mit allen ihren Ableitungen wie $\frac{1}{t^2}$ abfällt.

Beweis: Jede Cauchyfolge in X konvergiert, da X kompakt ist. Außerdem konvergiert auf dem Kegelende $\partial X \times [1, \infty)$ jede Cauchyfolge aufgrund der Kompaktheit von ∂X . Also ist X^+ nach dem Hopf-Rinow-Theorem (siehe [22, §1.4, Thm. 1.4.8]) vollständig. Sei $\text{exp}_x : T_x X^+ \rightarrow X$ die Exponentialabbildung an einem Punkt $x \in X^+$. Da X kompakt ist, ist der Injektivitätsradius auf $X \cup_{\partial X} ([1, 2) \times \partial X)$ sicher nach unten beschränkt. Wähle ein $3/2 > \epsilon > 1$. Sei $U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ eine Kartenumgebung zentriert um einen Punkt $(x_0, t_0) \in (\epsilon, \infty) \times \partial X$, so dass die Standardbasis des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ eine ON-Basis ist. Nun ist für beliebige $t' \geq 1$ in der Produktkarte $U \times (\epsilon, \infty)$

$$(x, t) \rightarrow (x, t \cdot t')$$

eine zentrische Streckung mit dem Faktor t' . Also wird der Injektivitätsradius für dieses Kartengebiet entlang dem Kegelende immer größer und ist somit insbesondere nach unten beschränkt und geht für $t \rightarrow \infty$ gegen Unendlich. Die Kompaktheit von ∂X beendet dann den Beweis von (i).

Sei $U \subset \partial X$ eine Kartenumgebung und sei $\nabla = d|_{\partial X} + B$ der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik $g_1(\cdot, \cdot)$ auf ∂X mit $B \in \Omega^1(\text{End}(T\partial X))$, dann ist nach (3.2) $\nabla := d + B$ der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik g_0 auf $[1, \infty) \times U$. Also ist $F = dB + B \wedge B \in \Omega^2([1, \infty) \times U)$ und es ist $F(\frac{\partial}{\partial t}, \cdot) = 0$. Wegen der Definition der Metrik (3.2) reskaliert sich die Norm einer k -Form der Länge 1 auf ∂X bezüglich der Metrik $g_1(\cdot, \cdot)$ mit dem Faktor $\frac{1}{t^2}$ beim Übergang zur Metrik $g_0(\cdot, \cdot)$. Analoges gilt für die Ableitungen der Krümmungen, was den Beweis abschliesst. \square

Die Definitionen 2.5 und 2.6 liefern uns eine kanonische Spin^c -Struktur \tilde{P}_0 , einen kanonischen Spinor Φ_0 der konstanten Länge 1 im Bündel W^+ und einen kanonischen Spin^c -Zusammenhang A_0 mit $D_{A_0}\Phi_0 = 0$ auf $X^+ \setminus X$.

Wir möchten auf X^+ nur Spin^c -Strukturen zulassen, die auf dem Kegelende der kanonischen Spin^c -Struktur entsprechen:

Definition 3.1 Wir definieren $Spin^c(X, \xi)$ als die Menge aller $Spin^c$ -Strukturen \tilde{P} auf X^+ , die für ein $N \geq 1$ einen Isomorphismus $\tilde{P}|_{[N, \infty) \times \partial X} \xrightarrow{\cong} \tilde{P}_0|_{[N, \infty) \times \partial X}$ besitzen.

Um die notwendige Allgemeinheit zu wahren, müssen wir Metriken und symplektische Strukturen auf dem Kegelende zulassen, die in einer Umgebung von g_0 und ω_0 liegen, so dass sie noch die Aussage von Proposition 3.1 erfüllen:

Definition 3.2 Wir nennen eine Metrik g auf X^+ zusammen mit einer selbstdualen symplektischen Struktur ω der Länge $\sqrt{2}$, so dass für (X^+, g, ω) Proposition 3.1 gilt eine zulässige Struktur (X^+, g, ω) .

Wir können nun auch zu jeder zulässigen Struktur (X^+, g, ω) einen kanonischen Spinor Φ_0 und einen kanonischen $Spin^c$ -Zusammenhang auf dem Kegelende finden. Wir wählen eine beliebige generische glatte Fortsetzungen von Φ_0 und A_0 auf ganz X^+ , diese Fortsetzung von Φ_0 kann dann evtl. Nullstellen haben. Falls jedoch ω (bzw. J) auf ganz X^+ fortgesetzt werden kann, wählen wir A_0 und Φ_0 als den globalen kanonischen $Spin^c$ -Zusammenhang bzw. kanonischen Spinor.

3.2 Die Seiberg-Witten-Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir das Setup für die Seiberg-Witten-Gleichungen auf X^+ besprechen. Wir legen dabei eine zulässige Struktur (X^+, g, ω) zugrunde.

3.2.1 Der Konfigurationsraum und die Gruppe der Eichtransformationen

Wir werden jetzt den geeigneten Konfigurationsraum \mathcal{C} und den geeigneten Raum der Eichtransformationen \mathcal{G} definieren. Eine wichtige Eigenschaft des Konfigurationsraums wird sein, dass er aus Paaren (A, Φ) besteht, die sich auf dem Kegelende asymptotisch (A_0, Φ_0) annähern. Da wir jedoch i.A. nicht erwarten können, dass (A_0, Φ_0) eine Lösung der ursprünglichen SW-Gleichungen ist, werden wir diese deformieren, so dass (A_0, Φ_0) eine Lösung auf dem Kegelende wird (s.u.).

Zunächst definieren wir die Sobolev-Norm:

Definition 3.3 Sei A ein $Spin^c$ -Zusammenhang einer $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} und bezeichne ∇_A den durch A und dem Levi-Civita-Zusammenhang auf TX^+ induzierte $Spin^c$ -Zusammenhang, dann definieren wir die Norm $\|\cdot\|_{k,A}$ auf $C^\infty(W^+)$ über X^+ für beliebige $s \in C^\infty(W^+)$ durch

$$\|s\|_{k,A}^2 = \int_{X^+} (|\nabla_A^k s|^2 + \cdots + |\nabla_A s|^2 + |s|^2) dvol_{g_0}. \quad (3.3)$$

Desweiteren bezeichnen wir mit $L_{k,A}^2(W^+)$ (oder kurz $L_{k,A}^2$) die Vervollständigung von $C_0^\infty(W^+)$ (glatte Schnitte mit kompaktem Träger) bezüglich dieser Norm.

Theorem 3.2 *i) $L_{k,A}^2(W^+)$ entspricht dem Raum aller W^+ -Schnitte im Distributions-Sinne, deren ersten k Ableitungen in L^2 liegen.
 ii) $L_k^2(\mathbb{C})$ entspricht dem Raum aller Schnitte mit Werten in \mathbb{C} im Distributions-Sinne, deren ersten k Ableitungen in L^2 liegen.
 iii) Es gilt das Sobolev-Einbettungs-Theorem, d.h. für $k > m + 2$ sind die Einbettungen*

$$\begin{aligned} L_{k,A}^2(W^+) &\rightarrow C_A^m(W^+) \\ L_k^2(\mathbb{C}) &\rightarrow C^m(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

und für $k \geq 1$ die Einbettungen

$$\begin{aligned} L_{k,A}^2(W^+) &\rightarrow L_{k-1,A}^2(W^+) \\ L_k^2(\mathbb{C}) &\rightarrow L_{k-1}^2(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

stetig.

(iv) Es gilt das Sobolev-Multiplikations-Theorem, d.h. für $2 < k'$ und $k \leq k'$ sind die Multiplikationen

$$\begin{aligned} L_{k'}^2(\mathbb{C}) \otimes L_{k,A}^2(W^+) &\rightarrow L_{k,A}^2(W^+) \\ L_{k'}^2(\mathbb{C}) \otimes L_k^2(\mathbb{C}) &\rightarrow L_k^2(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

stetig.

(v) Es gilt die Kato-Ungleichung, d.h. für einen Schnitt $u \in L_1^2(\mathbb{C})$ ist

$$\|d|u|\|_{L^2} \leq \|u\|_{L_1^2}.$$

Beweis: i) und ii) werden in [5, §2.2] und [4, p. 154] erklärt. Die Hauptvoraussetzung besteht darin, dass der Raum der kompakt getragenen Schnitte, deren L_k^2 -Norm beschränkt ist, dicht im behaupteten Raum von Distributionen liegen. Dies ist im allgemeinen nicht richtig, wohl aber nach

den zitierten Ergebnissen für vollständige Mannigfaltigkeiten mit nach unten beschränktem Injektivitätsradius und beschränkter Geometrie, d.h. der Krümmungstensor und alle seine Ableitungen sind beschränkt. Nach Proposition 3.1 ist aber X^+ vollständig und hat nach unten beschränkten Injektivitätsradius. X^+ hat beschränkte Geometrie, was daran liegt, dass der Krümmungstensor mit seinen Ableitungen wegen selbiger Proposition entlang dem Kegelende so wie $\frac{1}{t^2}$ abnimmt.

(iii)-(v) Da, wie bereits gesehen, X^+ vollständig ist, nach unten beschränkten Injektivitätsradius und beschränkte Geometrie hat, folgt dies aus [5, §2.7, Thm. 2.21] oder [9]. \square

Benutzt man die obigen Sobolev-Multiplikations-Theoreme, dann ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 3.4 Sei $l > 4$ so groß, dass $L_l^2 \subset C^2$ gilt. Mit diesem l definieren wir unseren Konfigurationsraum \mathcal{C} und unseren Raum der Eichtransformationen \mathcal{G} durch

$$\mathcal{C} = \{(A, \Phi) \mid (A - A_0) \in L_l^2(iT^*X^+) \text{ und} \\ (\Phi - \Phi_0) \in L_{l, A_0}^2(W^+)\} \quad (3.4)$$

und

$$\mathcal{G} = \{u : X^+ \rightarrow \mathbb{C} \mid |u| = 1 \text{ und } (1 - u) \in L_{l+1}^2\}. \quad (3.5)$$

Die Wirkung einer Eichtransformation sei wieder durch punktweise Multiplikation gegeben.

Wir definieren diese Räume also genau so, dass das kanonische Paar (A_0, Φ_0) im Konfigurationsraum liegt.

Analog zum geschlossenen Fall gilt wieder:

Satz 3.3 *Die Eichgruppe \mathcal{G} ist eine Hilbert-Lie-Gruppe. Die Operation von \mathcal{G} auf \mathcal{C} ist glatt und frei.*

Beweis: Wie in §2.1.4 ergibt das Sobolev-Multiplikations-Theorem 3.2.(iv) mit der Tatsache, dass für Schnitte u und v die Identität

$$(1 - u)(1 - v) = (1 - u) + (1 - v) - (1 - uv)$$

gilt, dass \mathcal{G} eine Hilbert Lie-Gruppe ist und glatt auf \mathcal{C} operiert (siehe Theorem 3.2). Sei $u \in \mathcal{G}$, $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$, so dass u die Konfiguration (A, Φ) fixiert. Da nun

$$A \cdot u = u^* \hat{A} = A + u^{-1} du$$

gilt, muss u konstant sein. Da aber (3.5) fordert, dass u auf dem Kegelende sich der konstanten 1-Funktion annähert, folgt, dass $u \equiv 1$ ist. \square

3.2.2 Die perturbierten SW-Gleichungen

Definition 3.5 Sei $B \in \text{End}(W^+)$ dann definieren wir

$$\{B\} := B - \frac{\text{tr}(B)}{2} \text{Id}$$

als den spurfreien Anteil von B .

Wir wollen nun die SW-Gleichungen für ein $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ in Abhängigkeit einer Perturbation $\eta \in L_{l-1}^2(i\Lambda^{2,+}T^*X^+)$ durch

$$F_{\hat{A}}^+ - q(\Phi) = F_{A_0}^+ - q(\Phi_0) + \eta \quad (3.6)$$

$$D_A \Phi = 0 \quad (3.7)$$

definieren. Es ist per Definition $\{\Phi \otimes \Phi^*\} = q(\Phi)$ wie in (2.9) der spurfreien Anteil von $\Phi \otimes \Phi^* \in \text{End}(W)$.

Die SW-Gleichungen sind also derart gestört, dass der kanonische $Spin^c$ -Zusammenhang A_0 , gepaart mit dem kanonischen Spinor Φ_0 , immer eine Lösung der SW-Gleichungen für $\eta \equiv 0$ auf $X^+ \setminus X$ darstellt. Die lokale Rechnung aus §2.1.4 zeigt auch in diesem Fall, dass Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichung unter Eichtransformationen wieder in Lösungen übergehen.

Definition 3.6 Sei $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$. Für $\eta \in L_{l-1}^2(i\Lambda^{2,+}T^*X^+)$ und einer $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X^+$ bezeichne $\mathcal{M}_\eta(\tilde{P})$ den Raum aller Äquivalenzklassen $[A, \Phi] \in \mathcal{B}$, so dass (A, Φ) die Gleichungen (3.6) und (3.7) erfüllt.

Aus technischen Gründen wollen wir den Raum der Perturbationen einschränken. Wir wählen ein beliebiges $\epsilon_0 > 0$, eine beliebige Fortsetzung \tilde{t} der Koordinatenfunktion t von $[1, \infty) \times \partial X$ auf ganz X^+ und ein $r > l$. Wir gehen nun zu dem Banach-Raum

$$\mathcal{N} = e^{-\epsilon_0 \tilde{t}} C^r(i\Lambda^{2,+}T^*X^+) \quad (3.8)$$

über und stattdessen ihn mit der Norm

$$\|\eta\| = \|e^{\epsilon_0 \tilde{t}} \eta\|_{C^r} \quad (3.9)$$

aus. Der Vorteil den Raum der Perturbationen auf \mathcal{N} einzuschränken besteht darin, dass die Perturbationen aus \mathcal{N} eine hinreichend starke Abfallbedingung auf dem Kegelseite erfüllen. Dies ist der spätere Kompaktheitsbetrachtung der Modulräume \mathcal{M}_η sehr zuträglich.

Analog zum geschlossenen Fall, erhalten wir den parametrisierten Modulraum:

Definition 3.7 Wir definieren den parametrisierten Modulraum in Abhängigkeit von der $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \in Spin^c(X, \xi)$ durch

$$\mathcal{M}(\tilde{P}) = \{([A, \Phi], \eta) \in \mathcal{B} \times \mathcal{N} \mid (3.6) \text{ und } (3.7) \text{ sind erfüllt}\}$$

3.3 Linearisierung der Gleichungen

In diesem Abschnitt werden wir lineare Theorie betreiben und zeigen, dass die Linearisierung der SW-Gleichungen modulo Eichtransformation ein Fredholm-Operator ist. Dies benutzend, werden wir anschließend sehen, dass der parametrisierte Modulraum $\mathcal{M}(\tilde{P})$ eine Banach-Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{B} \times \mathcal{N}$ ist und dass die Projektion $\mathcal{M}(\tilde{P}) \rightarrow X$ auf die Perturbations-Koordinate eine Fredholm-Abbildung darstellt, deren Fasern $\mathcal{M}_\eta(\tilde{P})$, die den Modulraum bezüglich einer Perturbation beschreiben, kompakt sind.

3.3.1 Vorbereitung

Bevor wir mit der Fredholm-Theorie starten, kümmern wir uns noch um einige technischen Details. In den SW-Gleichungen werden, durch Lemma 2.4 begründet, der spurfreie Anteil von Endomorphismen aus $End(W^+)$ mit $i\Lambda^{2,+}T^*X^+ \otimes \mathbb{C}$ identifiziert. Wir möchten diese Identifikation im folgenden verwenden.

Definition 3.8 (i) Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $isu(W^+)$ sei für $\eta_1, \eta_2 \in isu(W^+)$ durch

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \frac{1}{8} tr(\eta_1 \eta_2)$$

gegeben. Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm, bezeichnen wir mit $|\cdot|$.

(ii) Der Ausdruck $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ bezeichne das reelle Skalarprodukt auf $W_{\mathbb{R}}$ (d.h. W als reell 4-dimensionales Bündel aufgefasst), das von dem hermiteschen Skalarprodukt auf W induziert wird und für alle $x \in W$ die Eigenschaft $x \perp ix$ hat.

(iii) Die Abbildung $\pi_{T^*X \otimes \mathbb{C}}$ bezeichne die Projektion auf die komplexen 1-Formen.

(iv) Der Ausdruck ι_γ wird über eine lokale positiv orientierte ON-Basis e_1, \dots, e_4 von TX vermöge

$$\iota_\gamma \nabla_A \Phi = \sum_{i=1}^4 \rho(e_i \lrcorner \gamma) \nabla_{A, e_i} \Phi \in W^\pm$$

definiert. Mit \lrcorner ist die Kontraktion bezüglich der Paarung von 1-Formen mit Vektorfeldern gemeint.

Lemma 3.4 Sei f ein $i\mathbb{R}$ -wertige Funktion, a ein Schnitt in $T^*X^+ \otimes i\mathbb{R}$, ω, ω' Schnitte in $\Lambda^{2,+}T^*X^+$, Φ und ϕ glatte Schnitte in W^+ , ψ ein Schnitt in W^- und γ ein Schnitt in $\Lambda^p T^*X^+$, dann gilt:

1. $tr_{W^+}(\rho(i\omega)\rho(i\omega')) = 4\langle \omega, \omega' \rangle_{\Lambda^{2,+}T^*X^+}$,
2. $|\text{Im}(\Phi^*\phi)^2| + \frac{1}{2}tr_{W^+}(\{\Phi \otimes \phi^* + \phi \otimes \Phi^*\}^2) = |\Phi|^2|\phi|^2$,
3. $|\rho(a)\Phi|^2 = |\Phi|^2|a|^2$,
4. $\langle \rho(f)\Phi, \phi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle f, i\text{Im}(\Phi^*\phi) \rangle$,
5. $\langle \rho(a)\Phi, \psi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle a, 2i\text{Im}(\pi_{T^*X \otimes \mathbb{C}}(\rho^{-1}(\psi \otimes \Phi^*))) \rangle$,
6. $2\langle \rho(i\omega)\Phi, \phi \rangle = tr_{W^+}(\rho(i\omega)\{\Phi \otimes \phi^* + \phi \otimes \Phi^*\})$,
7. $D_A(\rho(\gamma)\Phi) = \rho(d\gamma + d^*\gamma)\Phi - 2\iota_\gamma \nabla_A \Phi + (-1)^p \rho(\gamma)D_A \Phi$.

Beweis: 1.) Man benutzt, dass 1-Formen der Länge 1 von ρ auf Isometrien $W^+ \rightarrow W^-$ abgebildet werden (Proposition 2.3). Daraus ergibt sich, dass 2-Formen von der Gestalt $e^1 \wedge e^2$, wobei e^1, e^2, e^3, e^4 eine positiv orientierte ON-Basis von T^*X ist, auf Isometrien von W^+ in sich abgebildet werden. Der Raum der selbstdualen 2-Formen wird lokal von $e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$ und $e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$ aufgespannt. Nun benutzen wir lokal die explizite Formeln für die komplexe Spin-Darstellung aus (2.1) durch Einführung einer lokalen fast komplexen Struktur, um die Gleichung für diese Formen zu verifizieren. Der Faktor 4 auf der rechten Seite ergibt sich aus der Tatsache, dass $\dim(W^+) = 2$ und die Länge dieser Formen gleich 2 ist. Jetzt folgt das allgemeine Ergebnis wegen Bilinearität auf beiden Seiten.

2.) Man kann wegen Lokalität oBdA. $\phi = \bar{\phi}$ und $|\phi| = 1$ in einer Karte voraussetzen. Zerlegt man nun ϕ in einen zu Φ linear abhängigen und einen zu Φ orthogonalen Anteil, folgt die Behauptung.

3.) Dies ist klar, da wir bereits wissen (siehe Proposition 2.3), dass 1-Formen der Länge 1 von ρ in Isometrien $W^\pm \rightarrow W^\mp$ überführt werden.

4.) Benutzt man $\rho(f) = fId_{W^+}$, ist dies eine einfache Rechnung.

5.) Man zerlege W^+ und W^- wie in §2.1.2.1 lokal $W^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ und $W^- = \Lambda^{0,1}$. Wegen Linearität auf beiden Seiten zerlegen wir $a = a_1 + a_2$, so dass $\rho(a_1)$ ein komplexes Vielfaches von $\psi \otimes \Phi^*$ und $\rho(a_2)$ orthogonal zu $\psi \otimes \Phi^*$ ist. Nun verwenden wir die expliziten Formeln (2.1) für die komplexe Spin-Darstellung. Setzt man in die zu beweisende Gleichung für $a = a_2$ ein, kommt auf beiden Seiten 0 raus (auf der rechten Seiten, weil ρ eine

orthogonale Abbildung ist, was aus der Orthogonalität des Dach-Produktes und der Kontraktion folgt). Es gilt dann

$$\langle \rho(a_1)\Phi, \psi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \rho(a_1), \psi \otimes \Phi^* \rangle_{\mathbb{R}}$$

und

$$\operatorname{Im}(\pi_{0,1}(a)) = \frac{1}{2}a,$$

woraus nun die Behauptung folgt.

6.) Es ist $\rho(i\omega) \in i\mathfrak{su}(W^+)$. Rechnen wir lokal, dann ist $\rho(i\omega)$ hermitesch und somit eine diagonalisierbare Matrix mit reellen Eigenwerten. Nimmt man also oBdA. an, dass $\rho(i\omega)$ eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen ist, rechnet man die Behauptung sofort nach (der Faktor 2 auf der linken Seite wird durch die Normkonvention aus Definition 3.8 verursacht).

7.) Sei e_1, \dots, e_4 eine lokale ON-Basis für TX und e^1, \dots, e^4 ihre duale ON-Basis von T^*X , dann ist nach der Definition von D_A (2.7)

$$\begin{aligned} D_A(\rho(\gamma)\Phi) &= \sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \cdot \nabla_{A,e_i}(\rho(\gamma)\Phi) \\ &= \sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \cdot \left[\left(\nabla_{A,e_i}^{\operatorname{End}(W)}(\rho(\gamma)) \right) (\Phi) + \rho(\gamma) \nabla_{A,e_i} \Phi \right] \end{aligned}$$

Wir bezeichnen hierfür $\nabla_A^{\operatorname{End}(W)}$ als den von ∇_A induzierten Zusammenhang auf den Endomorphismen-Bündel von W .

Zuerst überzeugen wir uns, dass

$$\sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \cdot \left(\nabla_{A,e_i}^{\operatorname{End}(W)}(\rho(\gamma)) \right) (\Phi) = \rho(d\gamma + d^*\gamma)\Phi \quad (3.10)$$

gilt. Wir erhalten zunächst

$$\sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \cdot \left(\nabla_{A,e_i}^{\operatorname{End}(W)}(\rho(\gamma)) \right) (\Phi) = \sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \cdot \rho(e_i \lrcorner (d\gamma + d^*\gamma))\Phi$$

Dazu benutzen wir wieder lokal die expliziten Formeln (2.1) für die komplexe Spin-Darstellung und lassen eingehen, dass der Zusammenhang ∇_A durch den Levi-Civita-Zusammenhang auf W und durch den $Spin^c$ -Zusammenhang A induziert wird. Die Rechnung lässt sich am einfachsten durchführen indem man:

1. $\rho(\gamma)$ als Element von $W \otimes W^*$ schreibt,

2. die (lokale) explizite Formel (2.1) für die komplexe Spindarstellung verwendet und
3. sich daran erinnert, dass das Quadrat der Kontraktions-Abbildung $e_i \lrcorner \cdot$ gleich 0 ist.

Dann bekommen wir ohne weitere Umwege das gewünschte Teilergebnis (3.10). Man bemerke, dass nicht die explizite Form von ρ eingeht, sondern nur die Darstellungseigenschaft von ρ .

Nachdem wir (3.10) erhalten haben, ist die letzte Gleichung, die wir noch überprüfen müssen

$$\sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \rho(\gamma) \nabla_{A, e_i} \Phi = -2\iota_\gamma \nabla_A \Phi + (-1)^p \rho(\gamma) D_A \Phi.$$

Wir können wegen Linearität oBdA. annehmen, dass γ von der Form $\gamma = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ ist. Wir wissen, dass $\rho : Cl(T^*X) \rightarrow End(W)$ ein Algebra-Homomorphismus ist und daher erhalten wir mit der Formel (2.3) für die Clifford-Multiplikation auf $\Lambda^* T^*X$ die Identität

$$\rho(e^i) \rho(\gamma) \nabla_{A, e_i} \Phi = \rho(e^i \wedge \gamma - e_i \lrcorner \gamma) \nabla_{A, e_i} \Phi.$$

Es gilt weiter

$$\rho(e^i \wedge \gamma) \nabla_{A, e_i} \Phi = (-1)^p \rho(\gamma) \rho(e_i) \nabla_{A, e_i} \Phi - \rho(e^i \lrcorner \gamma) \nabla_{A, e_i} \Phi$$

was aus einer Fallunterscheidung $e^i \lrcorner \gamma = 0, \neq 0$ folgt. Nun erinnern wir uns, dass

$$D_A \Phi = \sum_{i=1}^4 \rho(e^i) \nabla_{A, e_i} \Phi$$

(siehe Definition 2.6) definiert war, was den Beweis abschliesst. \square

Im geschlossenen Fall wissen wir (siehe [34, §3.3, Lem. 3.3.3]), dass D_A selbstadjungiert ist. Dieser Beweis benutzt allerdings partielle Integration, was einen erneuten Beweis in unseren speziellen Situation nötig macht.

Lemma 3.5 *Der Dirac-Operator D_A ist auf den Räumen $L_k^2(W)$ für $k \geq 1$ bezüglich dem L^2 -Skalarprodukt formal selbst-adjungiert. Seien also $\sigma_1, \sigma_2 \in L_k^2(W)$, dann gilt*

$$\int_{X^+} \langle D_A \sigma_1, \sigma_2 \rangle d\text{vol}_{g_0} = \int_{X^+} \langle \sigma_1, D_A \sigma_2 \rangle d\text{vol}_{g_0}.$$

Beweis: Nach der Rechnung aus [34, §3.3, Lem. 3.3.3], die punktweise stattfindet, wissen wir, dass

$$\int_{X^+} \langle D_A \sigma_1, \sigma_2 \rangle dvol_{g_0} = \int_{X^+} \langle \sigma_1, D_A \sigma_2 \rangle dvol_{g_0} + \int_{X^+} \operatorname{div}(V) dvol_{g_0}$$

gilt, dabei ist V ein Vektorfeld, so dass

$$\langle V(x), W(x) \rangle = \langle \sigma(1), W^*(x) \cdot \sigma_2(x) \rangle$$

für alle Vektorfelder W und alle $x \in X^+$ gilt. Der Träger von V erfüllt also $\operatorname{supp}(V) \subset \operatorname{supp}(\sigma_1) \cup \operatorname{supp}(\sigma_2)$. Da $L_k^2(W)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(W)$ bezüglich der L_k^2 -Norm ist, lassen sich σ_1 und σ_2 durch glatte, kompakt getragene Schnitte approximieren. Wenn V kompakten Träger hat, ist nach dem Gauss'schen Divergenzatz

$$\int_{X^+} \operatorname{div}(V) dvol_{g_0} = 0.$$

Aus der Definition von V wird klar, dass V L_1^2 -stetig von (σ_1, σ_2) abhängt. Aufgrund der Definition von $\operatorname{div}(\cdot) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}$ hängt der Ausdruck $\operatorname{div}(V)$ L^2 -stetig von (σ_1, σ_2) ab (vgl. Theorem 3.2.(i)). \square

3.3.2 Fredholm-Theorie

Für beliebige $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ führen wir den Operator $\delta_1^{(A, \Phi)}$, der das Differential der Eichtransformation an (A, Φ) beschreibt, und den Operator $\delta_2^{(A, \Phi)}$, der die Linearisierung des SW-Funktional für beliebiges $\eta \in \mathcal{N}$ an (A, Φ) beschreibt, ein. Wenn es klar ist an welcher Konfiguration wir arbeiten, lassen wir das hochgestellte (A, Φ) an $\delta_{1,2}$, der Übersichtlichkeit halber, weg. Wir erinnern uns, dass das SW-Funktional F_η eine glatte Abbildung

$$F_\eta : \mathcal{C} \rightarrow L_{l-1}^2(\Lambda^{2,+} T^* X^+ \otimes i\mathbb{R}) \oplus L_{l-1,A}^2(W^-)$$

ist, die durch

$$F_\eta(A, \Phi) = (F_A^+ - q(\Phi) - (F_{A_0}^+ - q(\Phi_0)) - \eta, D_A \Phi)$$

gegeben ist. Die Glattheit von F folgt, da $q(\cdot)$ aufgrund des Sobolev-Multiplikations-Theorems eine glatte Abbildung ist (vgl. [34, §4.2, Lem 4.2.1]).

Proposition 3.6 *Sei $l > 4$ wie in Definition 3.4. Für $k < l$ für lassen sich die Operatoren*

$$\begin{aligned} \delta_1 & : L_{k+1}^2(i\mathbb{R}) \longrightarrow L_k^2(T^* X^+ \otimes i\mathbb{R}) \oplus L_{k,A}^2(W^+) \\ \delta_2 & : L_{k+1}^2(T^* X^+ \otimes i\mathbb{R}) \oplus L_{k+1,A}^2(W^+) \longrightarrow L_k^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k,A}^2(W^-) \end{aligned}$$

durch

$$\delta_1(f) = (-df, f\Phi) \quad (3.11)$$

$$\delta_2(a, \phi) = (2\rho(d^+a) - \{\Phi\phi^* + \phi\Phi^*\}, (D_A\phi + \rho(a)\Phi)) \quad (3.12)$$

darstellen, dabei bezeichne wieder $\{\cdot\}$ den spurfreien Anteil des Argumentes und die Multiplikation $\Phi\phi^*$ bzw. $\phi\Phi^*$ sei durch Tensorieren gegeben.

Beweis: Wir behaupten also implizit, dass

$$L_{l+1}^2(i\mathbb{R})$$

der Tangentialraum von \mathcal{G} an der Identitäts-Eichtransformation und dass

$$L_l^2(T^*X^+ \otimes i\mathbb{R}) \oplus L_{l,A}^2(W^+)$$

der Tangentialraum von \mathcal{C} an (A, Φ) ist. Um dies zu sehen, muss man wegen (3.5) und (3.4) nur noch zeigen, dass

$$L_{l,A}^2 = L_{l,A_0}^2$$

gilt. Unter der Voraussetzung $A - A_0 \in L_l^2$ ist dies aber eine einfache Folge des Sobolev-Multiplikations-Theorems (siehe Theorem 3.2), welches dies nicht nur für l sondern auch für alle $k \leq l$ sicherstellt.

Die Richtigkeit der behaupteten Formeln für $\delta_{1,2}$ verifiziert man mit den folgenden Tatsachen:

- Für $u \in \mathcal{G}$ gilt lokal $\widehat{A} \cdot u^{-1} = uAu^{-1} + ud(u^{-1}) = A - u^{-1}du$.
- Es gilt $F_{A+a}^+ = F_A^+ + 2d^+a$ für eine imaginäre 1-Form a .

Dies schliesst den Beweis ab. □

Proposition 3.7 *Dann gilt mit allen von uns getroffenen Konventionen, dass die formal adjungierten Operatoren $\delta_{1,2}^*$ durch*

$$\delta_1^*(a, \phi) = -d^*a + i\text{Im}(\Phi^*\phi) \quad (3.13)$$

$$\delta_2^*(\eta, \psi) = (d^*\rho^{-1}(\eta) + 2i\text{Im}(\rho^{-1}(\psi \otimes \Phi^*)), D_A\psi - \eta\Phi) \quad (3.14)$$

gegeben sind.

Beweis: Alle dafür notwendigen Identitäten findet man in Lemma 3.4, und dass D_A formal selbst-adjungiert ist, findet man in Lemma 3.5. \square

Jetzt können wir die Linearisierung der Seiberg-Witten-Gleichungen mit entsprechender Eich-Fixierung betrachten und führen sie als den Operator

$$\mathcal{D} = \delta_1^* + \delta_2 \quad (3.15)$$

ein, der aufgrund der Gestalt von (3.12), (3.13) und dem Sobolev-Multiplikations-Theorem (siehe Theorem 3.2) eine glatte Abbildung

$$L_{k+1}^2(T^*X \otimes i\mathbb{R}) \oplus L_{k+1,A}^2(W^+) \longrightarrow L_k^2(i\mathbb{R}) \oplus L_{k,A}^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k,A}^2(W^-) \quad (3.16)$$

für $k < l$ ist. Analog ist der zu \mathcal{D} formal adjungierte Operator \mathcal{D}^* ein glatter Operator

$$L_{k+1}^2(i\mathbb{R}) \oplus L_{k+1,A}^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k+1,A}^2(W^-) \longrightarrow L_k^2(T^*X \otimes i\mathbb{R}) \oplus L_{k,A}^2(W^+) \quad (3.17)$$

für $k < l$.

Unser Ziel für diesen Unterabschnitt über die Fredholm-Theorie ist analog zum geschlossenen Fall die Fredholm-Eigenschaft von \mathcal{D} und \mathcal{D}^* :

Theorem 3.8 *Sei $l > 4$ und \mathcal{C} und \mathcal{G} bezüglich diesem l wie in Definition 3.4. Sei (X^+, g, ω) eine zulässige Struktur auf X^+ und $\mathcal{C}(\tilde{P})$ und $\mathcal{G}(\tilde{P})$ für eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \in Spin^c(X, \xi)$ wie oben konstruiert. Sei $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$. Dann sind \mathcal{D} in der Topologie von (3.16) und \mathcal{D}^* in der Topologie von (3.17) für $k < l$ **Fredholm-Abbildungen**. Für den Index gilt*

$$d(\tilde{P}) := \text{ind}(\mathcal{D}) = -\text{ind}(\mathcal{D}^*). \quad (3.18)$$

Dieser Index ist gleich 0, wenn der kanonische Spinor Φ_0 ohne Nullstelle vom Kegelerde $X^+ \setminus X$ auf ganz X^+ fortgesetzt werden kann.

Für den Beweis dieses Theorems werden wir die Geschlossenheit von ω nicht verwenden, diese spielt erst bei der Kompaktheit eine Rolle (siehe Theorem 3.20).

Wir teilen - [20] folgend - den Beweis von Theorem 3.8 in drei Teile ein. Zuerst werden wir eine allgemeine Klasse von sogenannten *zulässigen* Operatoren einführen und die Fredholm-Eigenschaft für diese Klasse von Operatoren nachweisen. Dann zeigen wir, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* in dieser Klasse liegen. Zuletzt zeigen wir dann die Index-Behauptung.

3.3.2.1 Fredholm-Theorie für zulässige Operatoren

Seien $E, F \rightarrow X^+$ zwei Riemannsche Vektorbündel, welche mit einem zur Metrik kompatiblen Zusammenhang ausgestattet sind. Wir betrachten einen elliptischen Operator erster Ordnung

$$D : C^\infty(E) \rightarrow L_{loc}^2(F)$$

von dem wir fordern, dass er die Form

$$D = \rho \circ \nabla_A + r \quad (3.19)$$

hat, wobei $\rho : \Lambda^1 T^* X \otimes E \rightarrow F$ und $r : E \rightarrow F$ gleichmäßig beschränkte lineare Bündelabbildungen sind. Wir bezeichnen Zusammenhänge auf E und F jeweils mit ∇_A . Wir stellen uns dabei vor, dass in unserem Kontext ∇_A der durch einen $U(1)$ -Zusammenhang A und dem Levi-Civita-Zusammenhang induzierte Zusammenhang auf W ist, der auf die etwas größeren Bündel E und F fortgesetzt wurde.

Definition 3.9 Wir nennen einen solchen Operator D zulässig, wenn es ein Schnitt R im Endomorphismenbündel $\text{End}(E)$ gibt, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für einen beliebigen glatten, kompakt getragenen Schnitt s gilt

$$\int_{X^+} |Ds|^2 = \int_{X^+} (|\nabla_A s|^2 + |s|^2 + \langle Rs, s \rangle). \quad (3.20)$$

2. Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für jedes Kompaktum $K \subset X^+$ und jeden kompakt getragenen, glatten Schnitt s

$$\int_K |\langle Rs, s \rangle| \leq C \|s\|_{L^2(K)}^2 \quad (3.21)$$

gilt.

3. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein Kompaktum $K \subset X^+$, so dass für alle glatten, kompakt getragenen Schnitte s

$$\int_{Z \setminus K} |\langle Rs, s \rangle| \leq \epsilon \|s\|_{L^2}^2 \quad (3.22)$$

gilt.

Bezeichnen wir mit $C_0^\infty(E)$ die Menge der glatten, kompakt getragenen Schnitte und betrachten D als einen Operator, der Schnitte aus C_0^∞ auf L^2 -Schnitte abbildet, dann gibt es drei Kandidaten für Domänen auf die D fortgesetzt werden kann.

1. Der erste Kandidat ist $L_{1,A}^2(E)$ als die Vervollständigung von C_0^∞ bezüglich der $L_{1,A}^2$ -Norm.
2. Der zweite Kandidat ist der Vervollständigung von C_0^∞ bezüglich der Norm

$$\|s\|_D^2 = \int_Z (|Ds|^2 + |s|^2).$$

Das ist die sogenannte *minimale Domäne* von D und wir bezeichnen diese Domäne mit $Dom_{min}(D)$.

3. Der dritte Kandidat besteht aus allen $s \in L^2(E)$, so dass als Distribution gesehen $Ds \in L^2(F)$ ist, dies ist die sogenannte *maximale Domäne* und wir bezeichnen sie mit $Dom_{max}(D)$, d.h.: $s \in L^2(E)$ ist genau dann in $Dom_{max}(D)$, wenn das lineare Funktional $L : C_0^\infty(F) \rightarrow \mathbb{R}$, das durch $L(t) = \int_{X^+} \langle D^*t, s \rangle$ gegeben ist, L^2 -beschränkt ist, wenn man C_0^∞ mit der L^2 Topologie versieht. Dann definiert man Ds als das eindeutige $t' \in L^2(F)$, das $L(t) = \int_{X^+} \langle t, t' \rangle$ erfüllt (Satz von Riesz, siehe [46]). Wir versehen Dom_{max} mit derselben Norm wie Dom_{min} und sehen, dass $Dom_{min} \subset Dom_{max}$ gilt.

Wir brauchen nun noch zwei weitere Lemmata als Vorbereitung, um die Fredholm-Eigenschaft für zulässige Operatoren zu zeigen.

Lemma 3.9 *Sei D ein zulässiger Operator. Dann existiert ein Kompaktum $K \subset X^+$ und eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $s \in C_0^\infty(E)$*

$$\int_{X^+} (|\nabla_A s|^2 + |s|^2) \leq C \left(\int_{X^+} |Ds|^2 + \int_K |s|^2 \right)$$

gilt.

Beweis: Wir nutzen die Eigenschaft 'zulässig' aus, in dem wir $\epsilon = \frac{1}{2}$ wählen und dann ein Kompaktum $K \subset X^+$ und $C' > 0$ finden, so dass (3.21) und (3.22) aus der Definition von Zulässigkeit erfüllt sind. Dann erhalten wir ebenfalls aus der Definition der Zulässigkeit (3.20)

$$\begin{aligned} \|s\|_{L_{1,A}^2}^2 &= \int_{X^+} (|\nabla_A s|^2 + |s|^2) \\ &= \int_{X^+} |Ds|^2 - \int_{X^+} \langle Rs, s \rangle \\ &\leq \int_{X^+} |Ds|^2 + \int_K |\langle Rs, s \rangle| + \int_{X^+ \setminus K} |\langle Rs, s \rangle| \\ &\leq \int_{X^+} |Ds|^2 + C' \int_K |s|^2 + \frac{1}{2} \|s\|_{L_{1,A}^2}^2. \end{aligned}$$

Zieht man nun auf beiden Seiten $\frac{1}{2}\|s\|_{L^2_{1,A}}^2$ ab und wählt $C = C' + 1$, erhält man das gesuchte Ergebnis. \square

Mit dieser Vorarbeit erhalten wir nun das folgende wichtigen Zwischenergebniss über zulässige Operatoren:

Satz 3.10 *Sei D ein zulässiger Operator auf X^+ , dann stimmen alle drei Kandidaten für die Domäne überein:*

$$L^2_{1,A}(E) = Dom_{min}(D) = Dom_{max}(D).$$

Falls D^ auch zulässig ist, dann sind die Operatoren D und $D^* : L^2_{1,A} \rightarrow L^2$ Fredholm und es gilt:*

$$\text{ind}(D) = -\text{ind}(D^*).$$

Beweis: Per Definition und wegen Zulässigkeit gilt

$$L^2_{1,A} \subset Dom_{min}(D) \subset Dom_{max}(D).$$

Lemma 3.9 liefert uns zusätzlich $Dom_{min}(D) \subset L^2_{1,A}$. Da $Dom_{min}(D)$ und $Dom_{max}(D)$ mit der selben Norm ausgestattet sind, ist es per Definition klar, dass $Dom_{min}(D)$ in $Dom_{max}(D)$ abgeschlossen ist. Um $Dom_{min}(D) = Dom_{max}(D)$ zu erreichen, reicht es daher zu zeigen, dass $Dom_{min}(D)$ dicht in $Dom_{max}(D)$ liegt. Hierfür brauchen wir spezielle Abschneidefunktionen:

Lemma 3.11 *Es existiert eine Folge von Abschneidefunktionen $(\beta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Alle β_m haben kompakten Träger;*
- *die Mengen $\beta_m^{-1}(1)$ sind kompakt und die Vereinigung aller dieser Mengen ist X^+ ;*
- *$\beta_m^{-1}(1) \subset \beta_{m+1}^{-1}(1)$*
- *die Gradienten $|\nabla\beta_m|$ sind durch eine Konstante b unabhängig vom Punkt und von m gleichmäßig beschränkt.*

Beweis von Lemma 3.11: Wir wissen aus Proposition 3.1, dass der Injektivitätsradius auf X^+ durch eine Konstante $\tau > 0$ nach unten beschränkt ist. Wir wählen eine lokal endliche Überdeckung durch geodätische Bälle B_m mit dem Radius τ , so dass alle diese Bälle auf den halben Radius eingeschränkt X^+ überdecken.

Sei $B \subset \mathbb{R}^4$ der offene Einheitsball im \mathbb{R}^4 . Und sei ψ eine radiale 'Bump'-Funktion mit

$$|\psi'| \leq \psi,$$

die konstant $\equiv 1$ zwischen 0 und dem halben Radius ist und auf dem Rand von B gleich 0 ist.

Für jedes B_m bekommen wir in Normalkoordinaten um B_m einen kanonischen Diffeomorphismus $\varphi_m : B_m \rightarrow B$, der die Mittelpunkte der Bälle aufeinander abbildet. Dies liefert uns für alle B_m eine radiale 'Bump-Funktion' $\psi_m = \varphi_m^* \psi$. Sei

$$d_m : B_m \rightarrow \mathbb{R}^+$$

die Abstandsfunktion um den Punkt m , dann gilt für den Gradienten von ψ_m

$$\nabla \psi_m = d\psi \nabla(d_m).$$

Da der Gradient von d_m nach dem Gauss-Lemma durch 1 beschränkt ist, sind die Gradienten aller ψ_m gleichmäßig und unabhängig von m beschränkt. Wir erhalten also eine Partition der eins durch Bälle vom Radius $\frac{\tau}{2}$ und Funktionen

$$\phi_n = \psi_n / \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \psi_m \right),$$

deren Gradienten gleichmäßig beschränkt sind. Wir definieren nun die gesuchten Abschneidefunktionen β_m durch

$$\beta_m = \sum_{n=1}^m \phi_n,$$

die per Definition die behaupteten Bedingungen erfüllen. \square

Fortsetzung vom Beweis von Satz 3.10: Wir wählen $\beta_{m \in \mathbb{N}}$ wie in diesem Lemma. Weiterhin fixieren wir ein $s \in \text{Dom}_{\max}(D)$ und setzen $s_m = \beta_m s$. Wir werden zeigen, dass s durch die Folge $\{s_m\}$ aus $\text{Dom}_{\min}(D)$ $\|\cdot\|_D$ -approximiert werden kann, was den Beweis für $\text{Dom}_{\min}(D) = \text{Dom}_{\max}(D)$ abschliesst. Anhand der Definition von $\text{Dom}_{\min}(D)$ bzw. $\text{Dom}_{\max}(D)$ sehen wir, dass die Folge der $\{s_m\}$ eine Folge in $\text{Dom}_{\min}(D)$ ist und in der L^2 -Topologie gegen s konvergiert. Um die Konvergenz in der von uns gewählten Topologie auf $\text{Dom}_{\min}(D)$ bzw. $\text{Dom}_{\max}(D)$ zu sehen, müssen wir die L^2 -Konvergenz von Ds_m nach Ds nachweisen. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |Ds - Ds_m|^2 &= \int_{X^+} |(1 - \beta_m)Ds - \rho(d\beta_m)s|^2 \\ &\leq \int_{W_m} (|1 - \beta_m|^2 |Ds|^2 + 2b\lambda |Ds||s| + b^2 \lambda^2 |s|^2). \end{aligned}$$

Dabei ist λ die Schranke für die Norm von ρ und $W_m \subset X^+$ durch $\beta_m|_{W_m} \neq 1$ definiert. Da sowohl s als auch Ds Objekte in L^2 sind und $W_{m+1} \subset W_m$ sowie $\bigcap W_m = \emptyset$ gilt, geht die rechte Seite gegen 0 für $m \rightarrow \infty$. Somit ist die erste Behauptung des Satzes gezeigt.

Lemma 3.12 Sei $\{s_i\} \subset L^2_{1,A}(E)$ eine Folge mit den Eigenschaften:

- $\|s_i\|_{L^2} \leq C$ für eine Konstante $C > 0$;
- Die Folge $(Ds_i)_i$ konvergiert in der L^2 -Topologie gegen ein $t \in L^2_{1,A}$.

Dann hat $\{s_i\}$ eine (stark) $L^2_{1,A}$ -konvergierende Teilfolge, deren Grenzwert $s \in L^2_{1,A}$ die Gleichung $Ds = t$ erfüllt.

Beweis: Wegen Lemma 3.9 wissen wir mit den Voraussetzungen, dass die Folge $\|\nabla_A s_i\|_{L^2}$ beschränkt ist. Sei nun $K \subset X^+$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Der Satz von Rellich-Kondrakov, der besagt, dass die Einbettung $L^2_{1,A}(K) \rightarrow L^2(K)$ kompakt ist, impliziert aufgrund der Beschränktheit der $\|\nabla_A s_i\|$, dass eine Teilfolge der s_{k_i} gegen ein eindeutiges $s \in L^2$ konvergiert, welches $Ds = t$ erfüllt. Wählt man nun eine Ausschöpfung von $\{K_\alpha\}_{(\alpha \in \mathbb{N})}$ von X^+ und verwendet die Diagonalfolge $(s_{K_\alpha, i})$, dann existiert ein $L^2_{1,loc}$ -Schnitt s mit der Eigenschaft, dass $Ds = t$ in L^2 gilt und dass die $(s_{K_\alpha, i})$ auf jedem K_α (stark) in der $L^2_{1,A}$ -Topologie gegen s konvergieren. Mit Lemma 3.9 finden wir eine Konstante $C > 0$ und ein Kompaktum $K \subset X^+$, so dass

$$\|s_i - s\|_{L^2_{1,A}}^2 \leq C \left(\|Ds_i - t\|_{L^2}^2 + \|s - s_i\|_{L^2_{1,A}(K)}^2 \right)$$

gilt; da dieses Lemma erstmal nur für glatte, kompakt getragene Schnitte gilt, geht man zu einer Folge aus C_0^∞ , die in der $L^2_{1,A}$ -Topologie gegen $s_i - s$ konvergiert, über und erhält die gewünschte Aussage aus Lemma 3.9 durch Ausnutzen der Stetigkeit von $D : L^2_{1,A} \rightarrow L^2$. Da $K \subset K_{\alpha'}$ für ein α' ist und wegen der Voraussetzung

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|Ds_i - t\|_{L^2} = 0,$$

geht die rechte Seite gegen 0 für $i \rightarrow \infty$. Also konvergieren die s_i (stark) in der $L^2_{1,A}$ -Topologie auf ganz X^+ gegen ein s , welches wegen

$$\|s\|_{L^2_{1,A}} \leq \|s - s_i\|_{L^2_{1,A}} + \|s_i\|_{L^2_{1,A}}$$

($\|s_i\| \leq 1$) wie benötigt ein Element aus $L^2_{1,A}(X^+)$ ist. □

Fortsetzung vom Beweis von Satz 3.10: Mit obigem Lemma 3.12 ist

sofort klar, dass D endlich-dimensionalen Kern hat, denn eine normierte Basis des Kerns von D hat nach dieser Aussage immer eine konvergente Teilfolge, was gleichbedeutend mit der endlich Dimensionalität des Kerns ist (Riesz-Lemma aus der Funktionalanalysis, vgl. [46]).

Wir wollen jetzt zeigen, dass D dann abgeschlossenes Bild hat. Sei s_i eine Folge in $L^2_{1,A}$ so dass Ds_i gegen ein $t \in L^2$ konvergiert, wobei oBdA. $t \neq 0$. Es reicht wegen dem gerade bewiesenen Lemma 3.12 zu zeigen, dass, falls die Folge der s_i in der L^2 -Norm unbeschränkt ist, eine Teilfolge von ihr im Kern von D liegt, da dies im Widerspruch zur Konvergenz von Ds_i gegen t wäre.

Sei die Folge der s_i also unbeschränkt in L^2 . Die Folge der $t_i = s_i / \|s_i\|_{L^2}$ ist eine Folge im L^2 -Einheitsball und eine Teilfolge also oBdA. die alte Folge konvergiert wegen obigem Lemma 3.12 und $Ds_i / \|s_i\|_{L^2} \rightarrow 0$ in der L^2_1 -Topologie gegen ein Element $t \in \ker(D)$ mit $\|t\|_{L^2} = 1$. Da aber der Kern von D endlich dimensional ist und alle t_i die L^2 -Norm gleich 1 haben, also im L^2 -Einheitsball liegen, folgt daraus, dass, bis auf endlich viele, alle t_i im Kern von D liegen. Dies impliziert, dass bis auf endlich viele alle s_i im Kern von D liegen. Also folgt insgesamt, dass D abgeschlossenes Bild hat.

Sei nun auch D^* zulässig. Da nun D abgeschlossenes Bild hat, können wir nach dem Satz über das abgeschlossene Bild (Closed-Range-Property) aus der Funktionalanalysis ([46, §IV.5]) ein Element aus dem Cokern von D durch ein Element $t \in L^2$ mit $D^*t = 0$ (im schwachen Sinne) repräsentieren. Also ist $t \in \text{Dom}_{\max}(D^*) = \text{Dom}_{\min}(D^*) = L^2_{1,A}$, da wir D^* als zulässig vorausgesetzt haben, und somit folgt

$$\dim(\text{coker}(D)) = \dim(\ker(D^*))$$

und wegen Symmetrie auch

$$\dim(\text{coker}(D^*)) = \dim(\ker(D)).$$

Dies impliziert, dass D und D^* Fredholm'sch sind und

$$\text{ind}(D) = -\text{ind}(D^*)$$

erfüllen. □

3.3.2.2 Zulässigkeit von \mathcal{D} und \mathcal{D}^*

Um nun den eben bewiesenen Satz auf \mathcal{D} und \mathcal{D}^* anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass diese zulässige Operatoren sind. Zuerst erklären wir die Zerlegung von \mathcal{D} und \mathcal{D}^* in die Form $\rho' \circ \nabla_A + r$ wobei ρ, r gleichmäßig beschränkt sind, wie es für zulässige Operatoren gefordert wird.

Für \mathcal{D} wählen wir:

- ρ' die Abbildung, die ein Element $a \otimes \phi \in \Lambda^1 \otimes W$ nach $\rho(a) \cdot \phi$ und ein Element $b \otimes c \in i\Lambda^1 \otimes \Lambda^1$ nach $(2\rho(P_+(b \wedge c)), P_0(\rho(b) \cdot \rho(c))) \in i\mathfrak{su}(W^+) \oplus i\mathbb{R}$ überführt, wobei ρ wieder die gleichmäßig beschränkte komplexe Spin-Darstellung, P_+ die gleichmäßig beschränkte Projektion auf den selbstdualen Anteil von 2-Formen und P_0 die Projektion auf den Grad-0-Anteil der Clifford-Algebra bezeichnet.
- ∇_A als den *Spin^c*-Zusammenhang auf W und auf den 1-Formen als den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ ;
- die Abbildung

$$r : L_{k+1}^2(i\Lambda^1) \oplus L_{k+1}^2(W^+) \rightarrow L_k^2(i\mathbb{R}) \oplus L_k^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k,A}^2(W^-)$$

als

$$r(a, \phi) = (i\text{Im}(\Phi^* \phi), -\{\Phi \phi^* + \phi \Phi^*\}, \rho(a)\Phi),$$

die gleichmäßig beschränkt ist, da dies bereits für ρ , $\text{Im}(\cdot)$, $\Phi \otimes \cdot$, $\cdot \otimes \Phi^*$, $\Phi^* \cdot$ und $\{\cdot\}$ gilt.

Nach der Definition (2.6) des Dirac-Operators gilt mit obiger Notation $D_A = \rho' \circ \nabla_A$, dass $d^*a = P_0(\rho(\nabla a))$ ist. Also hat \mathcal{D} die erforderliche Gestalt.

Für \mathcal{D}^* wählen wir:

- ρ' auf $\Lambda^1 \otimes W$ wie oben; auf $f \otimes a \in i\mathbb{R} \otimes \Lambda^1$ als $\rho'(f \otimes a) = -fa$, und auf $a \otimes \mu \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^{2,+}$ als $\rho'(a \otimes \mu) = \rho^{-1}(P_1(\rho(a) \cdot \rho(\mu)))$, dabei bezeichne P_1 die Projektion auf den Grad-1-Anteil in der Clifford-Algebra.
- ∇_A auf W wie oben und auf $i\mathbb{R} \oplus i\mathfrak{su}(W^+) = i\Lambda^{2,+}$ als $(d, \nabla \circ \rho^{-1})$, wobei ∇ den Levi-Civita-Zusammenhang bezeichne;
- die Abbildung

$$r : L_{k+1}^2(i\mathbb{R}) \oplus L_{k+1}^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k+1,A}^2(W^-) \rightarrow L_k^2(i\Lambda^1) \oplus L_{k,A}^2(W^+)$$

als

$$r(f, \eta, \psi) = (2i\text{Im}\rho^{-1}(\Phi^* \psi), f\Phi - \eta\Phi),$$

die gleichmäßig beschränkt ist, da dies bereits für ρ^{-1} , $\Phi^* \cdot$, $\text{Im}(\cdot)$ und $\cdot\Phi$ gilt.

Hiermit sehen wir, dass auch \mathcal{D}^* die erforderliche Gestalt hat.

Nun müssen wir noch nachweisen, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* die Beschränktheitsbedingungen aus der Definition 3.9 von zulässigen Operatoren erfüllen. Die zwei folgenden Lemmata werden durch Anwendung von Weitzenböck-Formeln Krümmungsterme ins Spiel bringen, welche mit t^{-2} entlang dem Kegelende abnehmen und somit den Beweis Zulässigkeit von \mathcal{D} und \mathcal{D}^* beenden werden.

Lemma 3.13 Für alle glatte, kompakt getragenen Schnitte

$$(a, \phi) \in iC^\infty(T^*X^+) \oplus C^\infty(W^+)$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |\mathcal{D}(a, \phi)|^2 &= \int_{X^+} (|\nabla a|^2 + |\nabla_A \phi|^2 + |\Phi|^2(|\phi|^2 + |a|^2) \\ &\quad + \text{Ric}(a, a) + \frac{s}{4}|\phi|^2 + \frac{1}{2}\langle \rho(F_{\hat{A}}^+) \phi, \phi \rangle \\ &\quad - 4\langle a \otimes \phi, \nabla_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle \phi, \rho(a) D_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne Ric den Ricci-Tensor und s die Skalar­krümmung der Riemannschen Metrik $g_0(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Beweis: Zuerst rechnen wir mit der Gestalt (3.13) von δ_1^* und der Gestalt (3.12) von δ_2 aus, dass

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |\mathcal{D}(a, \phi)|^2 &= \int_{X^+} \left(|d^* a|^2 - \underbrace{2\langle d^* a, i\text{Im}(\Phi^* \phi) \rangle}_{(i)} + |\text{Im}(\Phi^* \phi)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{4|\rho(d^+ a)|^2}_{(ii)} - \underbrace{2\langle \rho(d^+ a), \{\Phi \phi^* + \phi \Phi^*\} \rangle_{\mathbb{R}}}_{(iii)} + |\{\Phi \phi^* + \phi \Phi^*\}|^2 \right. \\ &\quad \left. + |D_A \phi|^2 + \underbrace{2\langle D_A \phi, \rho(a) \Phi \rangle_{\mathbb{R}}}_{(iv)} + |\rho(a) \Phi|^2 \right) \end{aligned}$$

ist. Benutzen wir nun die Lemmata 3.4 und 3.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |\mathcal{D}(a, \phi)|^2 &= \int_{X^+} \left(|d^* a|^2 - \underbrace{2\langle \rho(d^* a) \Phi, \phi \rangle_{\mathbb{R}}}_{(i) \text{ und 4. aus Lemma 3.4}} + |\text{Im}(\Phi^* \phi)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{2|d^+ a|_{\lambda^{2,+}}^2}_{(ii) \text{ und 1. aus Lemma 3.4}} - \underbrace{2\langle \rho(d^+ a) \Phi, \phi \rangle_{\mathbb{R}}}_{(iii) \text{ und 6. aus Lemma 3.4}} + |\{\Phi \phi^* + \phi \Phi^*\}|^2 \right. \\ &\quad \left. + |D_{,A} \phi|^2 + \underbrace{2\langle \phi, D(\rho(a) \Phi) \rangle_{\mathbb{R}}}_{(iv) \text{ und Lemma 3.5}} + |\rho(a) \Phi|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wir erinnern uns an die Weitzenböck-Formel (vgl. [22, §3.3, Thm. 3.3.3])

$$\langle (dd^* + d^*d)(a), a \rangle = \langle -\nabla_{e_i, e_i}^2 a, a \rangle + \langle \tilde{R}a, a \rangle \quad (3.24)$$

wobei e_1, \dots, e_4 eine lokale ON-Basis von TX^+ und \tilde{R} ein, mit dem Krümmungstensor $R(\cdot, \cdot)$ verwandter, (1,1)-Tensor ist, der durch

$$\tilde{R} = - \sum_{i,j=1}^4 e^i \wedge (e_j \lrcorner R(e_i, e_j)) \quad (3.25)$$

(dabei sei e^1, \dots, e^4 die zu e_1, \dots, e_4 duale Basis von T^*X^+) dargestellt werden kann. Da X^+ Dimension 4 hat, wissen wir, dass $d^* = -*d*$ gilt. Da zusätzlich $d^+ = \frac{1}{2}(d + *d)$ ist, gilt auf glatten 1-Formen

$$2d^*d^+ = d^*d. \quad (3.26)$$

Für eine *selbstduale* 2-Form b und eine 1-Form a gilt

$$\int \langle b, d^+a \rangle = \int \langle b, da \rangle = \int \langle d^*b, a \rangle,$$

was zusammen mit (3.24) und (3.26)

$$\begin{aligned} & \int_{X^+} (|d^*a|^2 + 2|d^+a|_{\lambda_{2,+}}^2) \\ &= \int_{X^+} (\langle (dd^* + d^*d)(a), a \rangle) \\ &= \int_{X^+} (\langle \nabla a, \nabla a \rangle + \langle \tilde{R}a, a \rangle), \end{aligned}$$

ergibt. Benutzen wir nun die Rechnung aus [22, §3.5, Lem 3.5.2] um zu sehen, dass $\langle \tilde{R}a, a \rangle = \text{Ric}(a, a)$ gilt, erhalten wir

$$\int_{X^+} (|d^*a|^2 + 2|d^+a|_{\lambda_{2,+}}^2) = \int_{X^+} (\langle \nabla a, \nabla a \rangle + \text{Ric}(a, a)). \quad (3.27)$$

Die Weitzenböck-Formel für den Operator D_A^2 lautet nach Lemma 2.6

$$D_A^2(\phi) = \nabla_A^* \nabla_A(\phi) + \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \rho(F_A^+) \cdot \phi. \quad (3.28)$$

Das liefert uns

$$\int_{X^+} |D_A \phi|^2 = \int_{X^+} \left(|\nabla_A \phi|^2 + \frac{s}{4} |\phi|^2 + \frac{1}{2} \langle \rho(F_A^+) \phi, \phi \rangle \right). \quad (3.29)$$

Die Punkte 2 und 3 aus Lemma 3.4 bestätigen, dass

$$\begin{aligned} & \int_{X^+} (|\text{Im}(\Phi^* \phi)|^2 + |\{\Phi \phi^* + \phi \Phi^*\}|^2 + |\rho(a) \Phi|^2) \\ &= \int_{X^+} |\Phi|^2 (|\phi|^2 + |a|^2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

gilt. Verwenden wir Punkt 7 aus Lemma 3.4 und benutzen, dass Antiselbstduale 2-Formen auf W^+ unter der komplexen Spin-Darstellung wie die 0-Abbildung wirken (siehe [34, §2.3, Lem.2.3.4]) sehen wir, dass

$$\begin{aligned} & 2 \int_{X^+} \langle \phi, D_A(\rho(a)\Phi) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \int_{X^+} (2\langle \phi, \rho(d^+a + d^*a)\Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 4\langle a \otimes \phi, \nabla_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle \phi, \rho(a)D_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

gilt. Das gewünschte Ergebnis ergibt sich nun aus (3.23)-(3.31) und weil sich

$$2\langle \phi, \rho(d^+a + d^*a)\Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle \rho(d^*a)\Phi, \phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle \rho(d^+a)\Phi, \phi \rangle_{\mathbb{R}}$$

zu 0 weghebt. \square

Für den formal adjungierten Operator \mathcal{D}^* erhalten wir ein analoges Resultat:

Lemma 3.14 *Für alle kompakt getragenen glatten Tripel*

$$(f, \eta, \psi) \in iC^\infty(T^*X) \oplus C^\infty(\mathfrak{isu}(W^+)) \oplus C^\infty(W^-)$$

gilt

$$\begin{aligned} & \int_{X^+} |\mathcal{D}^*(f, \eta, \psi)|^2 \\ &= \int_{X^+} \left(|df|^2 + \frac{1}{2} |\nabla(\rho^{-1}(\eta))|^2 + |\nabla_A \psi|^2 + |\Phi|^2(|f|^2 + |\eta|^2 + |\psi|^2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \langle \mathcal{R}\rho^{-1}(\eta), \rho^{-1}(\eta) \rangle + \frac{s}{4} |\psi|^2 + \frac{1}{2} \langle \rho(F_{\hat{A}}^-)\psi, \psi \rangle_{\mathbb{R}} \right. \\ & \quad \left. + 4\langle \psi, \iota_{\rho^{-1}(\eta)} \nabla_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}} + 2\langle \psi, f D_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}} + 2\langle \psi, \eta D_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}} \right). \end{aligned}$$

Dabei bezeichne \mathcal{R} den Endomorphismus von $\Lambda^{2,+}$ der durch $-\mathcal{W}^+ + \frac{s}{6}$ gegeben ist, wobei \mathcal{W} den Weyl-Krümmungstensor und s die Skalarkrümmung der Riemannschen Metrik bezeichne.

Beweis: Setzt man die Gestalt (3.11) von δ_1 und die Gestalt (3.14) von δ_2^* direkt in $\mathcal{D}^* = \delta_1 + \delta_2^*$ ein, erhält man zunächst

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^*(f, \eta, \psi)|^2 &= |df|^2 + |d^*(\rho^{-1}(\eta))|^2 + |\operatorname{Im}(\rho^{-1}(\Phi^*\psi))|^2 \\ & \quad - 2\langle df, i\operatorname{Im}(\rho^{-1}(\Phi^*\psi)) \rangle + 4\langle d^*(\rho^{-1}(\eta)), 2i\operatorname{Im}(\rho^{-1}(\Phi^*\psi)) \rangle \\ & \quad + |f|^2|\Phi|^2 + |D_A \psi|^2 + |\eta\Phi|^2 + 2\langle D_A \psi, f\Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle D_A \psi, \eta\Phi \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Auf $C^\infty(\Lambda^{2,+})$ ist $d^+d^* = \frac{1}{2}(dd^* + d^*d)$, dabei benutze man, dass $d^* = -*d^*$ und $d^+ = \frac{1}{2}(d + *d)$ gilt. Verwenden wir wieder, wie im Beweis von

vorherigem Lemma 3.13, die Weitzenböck-Formel für $dd^* + d^*d$, erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |d^*(\rho^{-1}(\eta))|^2 &= \int_{X^+} 1/2 |(dd^* + d^*d)(\rho^{-1}(\eta))|^2 \\ &= \int_{X^+} 1/2 |\nabla(\rho^{-1}(\eta))|^2 + 1/2 \langle \tilde{R}(\rho^{-1}(\eta)), \rho^{-1}(\eta) \rangle, \end{aligned}$$

dabei ist \tilde{R} wieder der durch (3.25) gegebene $(1, 1)$ -Tensor. Benutzt man die explizite Formel für \tilde{R} und vergleicht sie mit der für \mathcal{W} (vgl. [27, §8D, Satz 8.24]) erhält man, dass auf den selbstdualen 2-Formen $\tilde{R} = -\mathcal{W}^+ + \frac{s}{6}$ gilt. Dies liefert uns

$$\int_{X^+} |d^*(\rho^{-1}(\eta))|^2 = \int_{X^+} (1/2 |\nabla(\rho^{-1}(\eta))|^2 + 1/2 \langle \mathcal{R}(\rho^{-1}(\eta)), \rho^{-1}(\eta) \rangle) \quad (3.32)$$

Ebenso wie im Beweis von Lemma 3.13, verwenden wir die Weitzenböck-Formel für den Operator D_A^2 (vgl. [34, §5.1, Prop 5.1.5]) und erhalten

$$\int_{X^+} |D_A \psi|^2 = \int_{X^+} \left(|\nabla_A \psi|^2 + \frac{s}{4} |\psi|^2 + \frac{1}{2} \langle \rho(F_{\hat{A}}) \psi, \psi \rangle \right). \quad (3.33)$$

Diagonalisiert man η und nutzt man aus, dass $\text{tr}(\eta) = 0$ ist, kann man oBdA annehmen, dass η die Gestalt

$$\begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ hat. Daraus erkennt man dann, dass

$$|\eta\Phi|^2 = |\eta|^2 |\Phi|^2 \quad (3.34)$$

gilt.

Da nach Lemma 3.5 der Dirac-Operator D_A formal selbstadjungiert ist, erhalten wir

$$\int_{X^+} (2\langle D_A \psi, f\Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle D_A \psi, \eta\Phi \rangle_{\mathbb{R}}) = \int_{X^+} \langle \psi, D_A(f\Phi - \eta\Phi) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Nach 7. aus Lemma 3.4 gilt dann

$$\begin{aligned} \langle \psi, D_A(f\Phi - \eta\Phi) \rangle_{\mathbb{R}} &= 2\langle \psi, \rho(df)\Phi \rangle_{\mathbb{R}} + 2\langle \psi, fD_A\Phi \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\quad - 2\langle \psi, \rho(d(\rho^{-1}(\eta)) + d^*(\rho^{-1}(\eta)))\Phi \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\quad + 4\langle \psi, \iota_{\rho^{-1}(\eta)} \nabla_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle \psi, \eta D_A \Phi \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Wir sehen, dass $\rho^{-1}(\eta)$ eine mit i multiplizierte selbstduale 2-Form ist und daher gilt wegen $d^* = - * d *$, dass $\rho(d(\rho^{-1}(\eta))) = -\rho(*d^*(\rho^{-1}(\eta)))$ ist.

Wir wissen, dass $*$ auf reellen Formen dem konjugierten Transponieren auf Matrizen in $\text{End}(W)$ vermöge ρ entspricht (siehe [34, §2.5, Cor.2.4.5] und beachte, dass in unserem Kontext der Hodge-Operator $*i = i$ erfüllt). Für eine beliebige 1-Form a gilt allerdings in der komplexen Spin-Darstellung $\rho(a) = -\rho(a)^*$ (vgl. [34, §2.4]) und somit erhalten wir

$$\langle \psi, \rho(d(\rho^{-1}(\eta)))\Phi \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \psi, \rho(d^*(\rho^{-1}(\eta)))\Phi \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Jetzt lassen wir 5. aus Lemma 3.4 eingehen und erhalten somit insgesamt aus 3.34

$$\begin{aligned} \langle \psi, D_A(f\Phi - \eta\Phi) \rangle_{\mathbb{R}} &= 2\langle df, 2i\text{Im}(\rho^{-1}(\psi \otimes \Phi^*)) \rangle + 2\langle \psi, fD_A\Phi \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\quad - 4\langle d^*(\rho^{-1}(\eta)), 2i\text{Im}(\rho^{-1}(\psi \otimes \Phi^*)) \rangle \quad (3.36) \\ &\quad + 4\langle \psi, \iota_{\rho^{-1}(\eta)}\nabla_A\Phi \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle \psi, \eta D_A\Phi \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Die Zwischenergebnisse (3.32) bis (3.36) ergeben nun das gewünschte Ergebnis. \square

Nun haben wir alle Zutaten um die Zulässigkeit von \mathcal{D} und \mathcal{D}^* zu beweisen:

Satz 3.15 *Sei $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ und schreibe $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(A, \Phi)}$ bzw $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*_{(A, \Phi)}$. Dann sind*

$$\mathcal{D} : L_1^2(i\Lambda^1) \oplus L_1^2(W^+) \rightarrow L^2(i\mathbb{R}) \oplus L^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L^2(W^-)$$

und

$$\mathcal{D}^* : L_1^2(i\mathbb{R}) \oplus L_{1,A}^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{1,A}^2(W^-) \rightarrow L^2(i\Lambda^1) \oplus L^2(W^+)$$

zulässige Operatoren im Sinne von Definition 3.9.

Beweis: Wir müssen noch nachweisen, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* die Voraussetzungen von Definition 3.9 erfüllen. Die Lemmata 3.13 und 3.14 zeigen uns, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* , die Eigenschaft, die in 1. von Definition 3.9 gefordert wird, haben. Dazu benutzen wir die von uns getroffenen Konventionen für ∇_A und r und dass die L_k^2 -Räume als Vervollständigung der entsprechenden C_0^∞ -Räume definiert wurden.

Wir weisen die Eigenschaften 2. und 3. aus Definition 3.9 zunächst für den Fall nach, dass wir uns an der kanonischen Konfiguration $(A, \Phi) = (A_0, \Phi_0) \in \mathcal{C}$ befinden. Wir stellen fest, dass per Definition von \mathcal{C} der Ausdruck $\nabla_{A_0}\Phi_0$ und somit auch $D_A\Phi$ und F_{A_0} in L^2 sind und Φ_0 ein glatter Schnitt ist, für den ausserhalb eines Kompaktums $K \supset X$ punktweise $|\Phi_0|^2 = 1$ gilt. Ebenso nutzen wir die Aussage von Proposition 3.1 aus, dass der Riemannsche Krümmungstensor mit dem Faktor $\frac{1}{r^2}$ entlang dem Kegelende abnimmt. Daraus folgt, dass der Riemannsche Krümmungstensor somit ebenfalls in L^2 ist. Dies ergibt die Behauptung für (A_0, Φ_0) .

Befindet man sich an einer beliebigen Konfiguration $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ verwende man zusätzlich aus, dass

- $F_{\widehat{A}} - F_{\widehat{A}_0}$,
- $\nabla_A \Phi - \nabla_{A_0} \Phi_0$ und $D_A \Phi - D_{A_0} \Phi_0$ wegen

$$\begin{aligned} \nabla_A \Phi - \nabla_{A_0} \Phi_0 &= (\nabla_A \Phi - \nabla_A \Phi_0) + (\nabla_A \Phi_0 - \nabla_{A_0} \Phi_0) \\ &= ((A - A_0) \cdot (\Phi - \Phi_0) + \nabla_{A_0}(\Phi - \Phi_0)) \\ &\quad + (A - A_0)\Phi_0 \end{aligned}$$

und

- $1 - |\Phi|^2$

per Definition von \mathcal{C} in L^2 sind. Dies zeigt mit der Dreiecksungleichung die Behauptung für allgemeine (A, Φ) . \square

3.3.2.3 Regularität

Wir werden zeigen, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* dieselben Regularitätsregeln wie elliptische Operatoren erster Ordnung befolgen. In unserem Fall heisst das, wenn das Bild in L_k^2 liegt, dann lag das Urbild bereits in L_{k+1}^2 . Dies hat dann zur Folge, dass Elemente aus dem Kern und Co-Kern von \mathcal{D} maximale Regularität (d.h. dass sie in L_l^2 sind) besitzen.

Lemma 3.16 *Sei $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(A, \Phi)}$, $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_{(A, \Phi)}^*$.*

a) *Falls $(a, \phi) \in L^2(i\Lambda^1) \oplus L^2(W^+)$ und*

$$\mathcal{D}(a, \phi) \in L_k^2(i\mathbb{R}) \oplus L_{k,A}^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k,A}^2(W^-)$$

für ein $k < l$, dann gilt

$$(a, \phi) \in L_{k+1}^2(i\Lambda^1) \oplus L_{k+1,A}^2(W^+).$$

b) *Falls $(f, \eta, \psi) \in L^2(i\mathbb{R}) \oplus L^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L^2(W^-)$ und*

$$\mathcal{D}^*(f, \eta, \psi) \in L_k^2(i\Lambda^1) \oplus L_{k,A}^2(W^+)$$

für ein $k \geq 0$. Dann gilt

$$(f, \eta, \psi) \in L_{k+1}^2(i\mathbb{R}) \oplus L_{k+1,A}^2(i\mathfrak{su}(W^+)) \oplus L_{k+1,A}^2(W^-).$$

Beweis: a) Wir wissen nach §3.3.2.2, dass \mathcal{D} zulässig ist und somit eine Darstellung

$$\mathcal{D} = \rho' \circ \nabla_A + r$$

hat, wobei $\rho : \Lambda^1 T^* X \otimes E \rightarrow F$ und $r : E \rightarrow F$ gleichmäßig beschränkte Bündelabbildungen auf dem Raum der glatten, kompakt getragenen Schnitte sind. Ebenso wissen wir nach unserer Wahl von ρ' , dass der Kern von ρ' trivial und somit \mathcal{D} elliptisch ist.

Dies liefert uns mit der L^2 -Dreiecksungleichung für glatte, kompakt getragene Schnitte die Ungleichung

$$\int_{X^+} |\nabla_A^{k'} \mathcal{D}(a, \phi)|^2 \geq C_1 \int_{X^+} |\nabla_A^{k'+1}(a, \phi)|^2 - C_2 \|(a, \phi)\|_{L_{k'}^2}^2,$$

wobei $k' \leq k$ und $C_1, C_2 > 0$ ist. Die Elliptizität von \mathcal{D} ermöglicht das 'Verstecken' von ρ' in C_1 . Ebenso sehen wir, dass die Konstanten C_1 und C_2 nicht von der Größe des Trägers von (a, ϕ) abhängen, sondern lediglich von den Konstanten, die die gleichmäßig beschränkten Bündelabbildungen $\rho : \Lambda^1 T^* X \otimes E \rightarrow F$ und $r : E \rightarrow F$ beschränken.

Die gesuchte Behauptung können wir nun mittels einem 'Bootstrapping'-Argument zeigen. Wir wählen hierfür zunächst $k' = 0$. Sei $\beta_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Abschneidefunktionen wie im Beweis von Lemma 3.11 konstruiert. Da \mathcal{D} ein elliptischer Differentialoperator erster Ordnung ist, liefert uns lokale elliptische Theorie, dass $\beta_m(a, \phi) \in L_1^2$ ist. Setzt man diese Folge in obige Ungleichung ein und benutzt dann, dass die Voraussetzungen aus der Behauptung die linke Seite durch eine Konstanten beschränken, sehen wir dass $\beta_m(a, \phi)$ eine Cauchy-Folge in L_1^2 ist und somit $(a, \phi) \in L_1^2$ gilt. Nehmen wir nun an, dass die Behauptung für $k' < k$ gilt, wiederholen wir dieses Argument mit $k' + 1$ und sehen, dass $(a, \phi) \in L_{k'+1}^2$ gilt.

b) Da auch \mathcal{D}^* als zulässiger Operator die Darstellung (3.19) mit den exakt gleichen Voraussetzungen besitzt, folgt die Behauptung b) vollkommen analog. \square

Satz 3.17 *Der Kern und der Co-Kern von $\mathcal{D}^{(A, \Phi)}$ und $\mathcal{D}^{*,(A, \Phi)}$ bestehen aus glatten Schnitten, wenn $(A, \Phi) - (A_0, \Phi_0)$ glatt ist.*

Beweis: Lemma 3.16 zeigt die Behauptung für den Kern beider Abbildungen durch Einsetzen von Elemente aus dem Kern, da man wegen der Voraussetzung an (A, Φ) $l > 0$ beliebig groß wählen kann und wir nach Theorem 3.2 die Sobolev-Einbettung verwenden dürfen. Die Behauptung über den Co-Kern ergibt sich daraus automatisch, da

$$\text{coker}(\mathcal{D}) = \ker(\mathcal{D}^*)$$

und

$$\text{coker}(\mathcal{D}^*) = \ker(\mathcal{D})$$

aufgrund der Betrachtung für zulässige Operatoren in §3.3.2.1 gilt. \square

3.3.2.4 Der Index im fast komplexen Fall

Aus der Zulässigkeit von \mathcal{D} und \mathcal{D}^* folgt, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* Fredholm-Operatoren in der Topologie von Theorem 3.8 für $k = 0$ sind. Um den Fall $k = 0$ im Beweis des Theorems 3.8 abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass im Falle einer globalen Fortsetzung der kompatiblen fast komplexen Struktur von dem Kegelende auf ganz X^+ der Index von \mathcal{D} gleich 0 ist. Dies erledigt im Wesentlichen folgendes Lemma:

Lemma 3.18 *Falls $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ die punktweise Abschätzung*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}|\Phi|^2 \geq \max_{x \in X^+} \left(|Ric(x)| + 2|\mathcal{R}(x)| + \frac{1}{4}|s(x)| \right. \\ \left. + \frac{1}{2}|F_{\hat{A}}(x)| + 2|\nabla_A \Phi(x)| + |D_A \Phi(x)| \right) \end{aligned}$$

erfüllt, dann haben \mathcal{D} und \mathcal{D}^* trivialen Kern.

Beweis: Mit obiger Ungleichung und den Lemmata 3.13 und 3.14 sowie der Tatsache, dass $2ab \leq a^2 + b^2$ für $a, b > 0$ ist, erhalten wir

$$\int_{X^+} |\mathcal{D}(a, \phi)|^2 \geq \int_{X^+} \left(|\nabla a|^2 + |\nabla_A \phi|^2 + \frac{1}{2}|\Phi|^2(|a|^2 + |\phi|^2) \right)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{X^+} |\mathcal{D}^*(f, \eta, \psi)|^2 \geq \int_{X^+} \left(|df|^2 + \frac{1}{2}|\nabla \rho^{-1}(\eta)|^2 + |\nabla_A \psi|^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}|\Phi|^2(|f|^2 + |\eta|^2 + |\psi|^2) \right) \end{aligned}$$

(Anstatt $\frac{1}{4}$ auf der linken Seite der Voraussetzung würde auch jede beliebige kleinere Konstante funktionieren). Hieraus liest man sofort ab, dass \mathcal{D} und \mathcal{D}^* trivialen Kern haben. \square

Proposition 3.19 *Sei J eine kompatible fast komplexe Struktur, die die fast komplexe Struktur des Kegelendes (siehe §3.1) auf ganz X^+ fortsetzt. Dann gilt für eine $Spin^c$ -Struktur, die im Sinne von Proposition 2.12 durch J induziert wird, dass für alle $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$*

$$\text{ind}(\mathcal{D}^{(A, \Phi)}) = 0$$

ist.

Beweis: Sei (A_0, Φ_0) die kanonische Konfiguration, die durch J gemäß Proposition 2.12 und Definition 2.6 bestimmt wird. Wenn wir die von uns gewählte Metrik um ein festes $\lambda > 0$ skalieren, bleiben die Sobolev-Räume unverändert, da sich die Sobolev-Normen ebenfalls um λ skalieren. Falls (A_0, Φ_0) die Ungleichung aus Lemma 3.18 für die ursprüngliche Metrik nicht erfüllt, erfüllt es sie nachdem man die Metrik mit λ vermöge $g \rightarrow \lambda^2 g$ skaliert hat, da dann

- die Reskalierung ein stetiger Prozess ist und die Metrik lediglich auf dem Kompaktum $X \cup [1, \lambda) \times \partial X$ stört und somit den Fredholm-Index nicht verändert,
- wie im Beweis von Theorem 3.15 erklärt, alle Krümmungsterme und die weiteren Terme aufgrund der Zugehörigkeit zum jeweiligen Sobolev-Raum beschränkt sind,
- alle in der Ungleichung vorkommenden Krümmungsterme mit $\frac{1}{\lambda^2}$ skaliert werden,
- die Terme $|\nabla_{A_0} \Phi_0(x)|$ und $|D_{A_0} \Phi_0(x)|$ mit $\frac{1}{\lambda}$ skaliert werden.

Also ist nach Lemma 3.18 der Index für (A_0, Φ_0) gleich 0. Da aber \mathcal{C} zusammenhängend ist und wir aus der Funktionalanalysis wissen, dass der Fredholm-Index eine stetig Abbildung ist (vgl. z.B. [21]), ist der Index somit für alle $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ gleich 0. \square

3.3.2.5 Beweis von Theorem 3.8

Für $k = 0$ ist der Beweis von Theorem 3.8 durch die vorherigen Unterabschnitte vollständig. Jedoch folgt das Ergebnis für $0 < k < l$ aus der Regularitätsbetrachtung in Lemma 3.16, denn diese besagt, dass Elemente aus dem Kern und Co-Kern bereits unabhängig (!) von dem gewählten $0 \leq k < l$ in L_l^2 liegen. \square

3.4 Der Seiberg-Witten-Modulraum

Nachdem wir eine geeignete Fredholm-Theorie erhalten haben, werden wir uns nun der Analysis des Modulraums und des parametrisierten Modulraums widmen. Im Gegensatz zum geschlossenen Fall müssen wir uns nicht um reduzierbare Konfigurationen (d.h. $\Phi \equiv 0$) kümmern, da diese aufgrund der Definition des Sobolev-Raums, der eine $L_{l,A}^2$ Annäherung an den kanonischen irreduziblen Spinor auf dem Kegelende fordert, nicht vorkommen können.

Wir werden die wichtigsten Eigenschaften wie z.B. generische Glattheit und Kompaktheit auch in unserer allgemeineren Situation bekommen. Analog zum geschlossenen Fall argumentieren wir über die unendlich dimensionale Version des impliziten Funktionensatz, nach dem wir die Surjektivität des Differentials des SW-Funktional sichergestellt haben. Das Ziel in diesem Abschnitt ist daher folgendes Theorem:

Theorem 3.20 *Sei (X^+, g, ω) eine zulässige Struktur und sei*

$$\tilde{P} \in \text{Spin}^c(X, \xi)$$

eine Spin^c -Struktur (bzgl. dieser zulässigen Struktur), dann ist der Raum $\mathcal{M}(\tilde{P})$ (der in unserem Fall nur aus irreduziblen Konfigurationen besteht) eine Banach-Untermannigfaltigkeit der Hausdorff-Hilbert-Mannigfaltigkeit $\mathcal{B} \times \mathcal{N}$.

Die Projektion

$$\pi_2 : \mathcal{M}(\tilde{P}) \rightarrow \mathcal{N}$$

auf die Perturbations-Koordinate ist eine glatte Fredholm-Abbildung, die an jeder Lösung $[A, \Phi] \in \mathcal{D}$

$$\dim(\ker(D\pi_2)) = \dim(\ker(\mathcal{D})), \quad \dim(\text{coker}(D\pi_2)) = \dim(\text{coker}(\mathcal{D}))$$

erfüllt. Für eine Baire-Menge \mathcal{N}_0 von Perturbationen $\eta \in \mathcal{N}$ und für alle $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$ ist die Abbildung $D\pi_2^{([A, \Phi])}$ surjektiv. In diesen Fällen gilt dann

$$\dim(\ker(D^{([A, \Phi])}\pi_2)) = \text{ind}(\mathcal{D}),$$

und der Modulraum \mathcal{M}_η eine ist glatte Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim(\ker(D^{([A, \Phi])}\pi_2)) = \text{ind}(\mathcal{D}).$$

*Weiterhin ist die Projektion π_2 eine **eigentliche** (oder 'proper') Fredholm-Abbildung, d.h.: Sei $([A_i, \Phi_i], \eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\tilde{P})$ eine Folge in \mathcal{M} , so dass die η_i in \mathcal{N} konvergieren, dann konvergiert eine Teilfolge $([A_{i_k}, \Phi_{i_k}], \eta_{i_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset ([A_i, \Phi_i], \eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}(\tilde{P})$. Insbesondere sind alle Modulräume $\mathcal{M}(\tilde{P})_\eta$ kompakt.*

Wir gliedern den Beweis in folgende Unterabschnitte.

3.4.1 Der Quotientenraum

Um glatte Modulräume $\mathcal{M}(\tilde{P})_\eta$ erwarten zu können, brauchen wir mindestens, dass der Quotientenraum $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ eine Hausdorff-Hilbert-Mannigfaltigkeit ist.

Analog zum geschlossenen Fall beweisen wir zunächst eine geeignete Version des 'Basic-Convergence'-Lemmas.

Lemma 3.21 *Seien $(A_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B_n, \Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergierende Folgen in $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\tilde{P})$ über X^+ mit Grenzwert (A, Φ) respektive (B, Ψ) . Es existiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\sigma_n \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(\tilde{P})$ mit*

$$(A_n, \Phi_n) \cdot \sigma_n = (B_n, \Psi_n).$$

Dann existiert ein $\sigma \in \mathcal{G}$, dass

$$(A, \Phi) \cdot \sigma = (B, \Psi)$$

erfüllt und für jede kompakte Teilmenge $K \subset X^+$ existiert eine Teilfolge von $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die über K in der $L^2_{l+1,loc}$ -Norm gegen $\sigma|_K$ konvergiert.

Beweis: Dies wird in [34, §4.5] für geschlossene 4-Mannigfaltigkeiten bewiesen. Der Beweis macht nur von der Kompaktheit, aber nicht von der Geschlossenheit der Mannigfaltigkeit Gebrauch, und daher gilt die Aussage auch für X .

Dasselbe Argument beweist dann analog die Aussage auch für alle Mannigfaltigkeiten der Form

$$X_n = X \cup_{\partial X} [1, n] \times \partial X, n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\sigma^{(n)} \in \mathcal{G}_{X_n}$ die Eichtransformation über X_n die

$$(A, \Phi)|_{X_n} \cdot \sigma^{(n)} = (B, \Psi)|_{X_n}$$

erfüllt. Weil (A, Φ) und (B, Ψ) irreduzible Konfigurationen sind, ist $\sigma^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig (siehe Satz 3.3). Die Eichtransformationen haben lokalen Charakter und daraus folgern wir dies die Existenz des behaupteten globalen σ mit $1 - \sigma \in L^2_{l+1,loc}$. Da für jedes Kompaktum $K \subset X^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $K \subset X_N$ gilt, ist die Konvergenzbehauptung bewiesen.

Wir müssen nun zeigen, dass $\sigma \in \mathcal{G}$ bzw. äquivalent dazu $1 - \sigma \in L^2_{l+1}$ gilt. Hinreichend weit hinten auf dem Kegende sind sowohl Φ als auch Ψ nicht verschwindend. Wir betrachten die Projektion von $\sigma\Phi = \Psi$ auf den Φ_0 Anteil im trivialen $\Lambda^{0,0}$ -Bündel, wobei wir uns daran erinnern, dass Φ_0 der

konstante 1-Schnitt ist. Da der $\Lambda^{0,2}$ -Anteil von Φ bzw. Ψ dazu orthogonal ist, bildet die L^2 -Norm von $1 - \Psi$ eine obere Schranke für die L^2 -Norm von $1 - \sigma$, was $1 - \sigma \in L^2$ zeigt. Um die höhere Regularität zu bekommen, zerlegen wir den Rand ∂X in endlich viele Koordinatenumgebungen U_i , so dass σ auf jedem U_i eine Darstellung der Form

$$\sigma = e^{i\varphi_i}$$

besitzt. Dies ist möglich, da $1 - \sigma \in L^2$ und $\sigma \in L^2_{l+1,loc} \subset C^2$ ($l > 4$ war hierfür hinreichend groß gewählt). Auf jedem U_i gilt wegen $\sigma \cdot A = B$ die Gleichung

$$A - B = \sigma^{-1} d\sigma = i\varphi'_1,$$

also ist mit der Kompaktheit von ∂X $1 - \sigma \in L^2_1$ und $\varphi_i \in L^2_{l+1}$ gezeigt. Die höhere Ableitungen bis zur $l + 1$ -ten Ableitung von σ bekommen wir nun durch die hohe Regularität von φ_i in den Griff, denn diese bestehen aus Summanden der Form

$$\varphi_i^{(j_1)} \dots \varphi_i^{(j_k)} e^{i\varphi}, j_1 + \dots + j_k \leq l + 1.$$

Da $l > 4$ gewählt war, ist höchstens ein $\varphi_i^{(i_i)} \notin L^2_3$, aber dennoch in L^2 , und somit ist jeder Summand aufgrund des Sobolev-Multiplikations Theorem 3.2.(iv) in L^2 . Dies schliesst den Beweis ab. \square

Proposition 3.22 *Der Quotientenraum $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ ist eine Hausdorff-Hilbert-Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an einer Äquivalenzklasse $[A, \Phi] \in \mathcal{B}$ wird mit*

$$L^2_l(iT^*X^+) \oplus L^2_l(W^+) / \text{bild}(\delta_1)$$

identifiziert, wobei $\delta_1 = (-d \cdot, (\cdot)\Phi)$ die Linearisierung der Eichtransformation als Abbildung $L^2_{l+1} \rightarrow L^2_l$ bezeichnet.

Beweis: Den Beweis findet man für geschlossene Mannigfaltigkeiten in [34, §4.5], allerdings anstatt der Geschlossenheit der Mannigfaltigkeit geht tatsächlich nur Lemma 3.21 ein, welches wir bereits für unsere Situation bewiesen haben. \square

Bemerkung 3.23 Die Hilbert-Struktur von \mathcal{B} kann man explizit angeben, denn es gilt analog zum geschlossenen Fall das sogenannte *Slice-Theorem* (siehe [34, §4.5, Lem.4.5.5]). Sei $x \in \mathcal{C}$ beliebig, dann besagt das Slice-Theorem, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathcal{C}$ von x und eine Hilbert-Untermannigfaltigkeit $S \subset U \subset \mathcal{C}$ existiert, so dass die natürliche Abbildung (durch Anwendung der Eichtransformation)

$$S \times \mathcal{G} \xrightarrow{\cong} U \subset \mathcal{C}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Es gibt eine sogenannte *Coulomb-Eichung* $\sigma \in \mathcal{G}$, d.h. dass $S - x \cdot \sigma$ ein linearer Raum ist dessen Tangentialraum für jeden Punkt im Kern von δ_1^* liegt.

3.4.2 Glatte Struktur auf dem parametrisierten Modulraum

Die glatte Struktur des Modulraums erhalten wir analog zum geschlossenen Fall aus dem impliziten Funktionensatz. Wir betrachten daher das Seiberg-Witten-Funktional

$$F : \mathcal{C}(\tilde{P}) \times \mathcal{N} \rightarrow L_{l-1}^2(\mathfrak{isu}(2) \oplus W^-),$$

das durch

$$F(A, \Phi, \eta) = (F_A^+ - q(\Phi) - (F_{A_0}^+ - q(\Phi_0)) - \eta, D_A \Phi)$$

gegeben ist. Da dieses Funktional mit der Eichtransformation kommutiert, d.h. sei $\sigma \in \mathcal{G}$ dann ist

$$F((A, \Phi) \cdot \sigma, \eta) = F(A, \Phi, \eta),$$

gilt per Definition

$$\mathcal{M}(\tilde{P}) = \{([A, \Phi], \eta) \in \mathcal{B} \times \mathcal{N} \mid F(A, \Phi, \eta) = 0\}.$$

Lemma 3.24 *Sei $(A, \Phi, \eta) \in \mathcal{C} \times \mathcal{N}$, so dass $F(A, \Phi, \eta) = 0$ (oder $([A, \Phi], \eta) \in \mathcal{M}$) dann ist $D^{(A, \Phi, \eta)}F$ auf den entsprechenden Tangentialräumen surjektiv.*

Beweis: Wir wissen, dass für

$$DF := D^{(A, \Phi, \eta)}F : L_l^2(i\Lambda^1) \oplus L_{l,A}^2(W^+) \oplus \mathcal{N} \rightarrow L_{l-1}^2(\mathfrak{isu}(W^+)) \oplus L_{l,A}^2(W^-)$$

die explizite Formel

$$DF(a, \phi, \eta) = (\rho(d^+a) - \{\Phi\phi^* + \phi\Phi^*\} - \eta, D_A\phi + \rho(a)\Phi) \quad (3.37)$$

gilt. Wir wenden nun ein Transversalitätsargument an. Die Abbildung DF ist im wesentlichen δ_2 (Linearisierung der SW-Gleichungen) plus eine Einbettung von \mathcal{N} in $L_{l-1}^2(\mathfrak{isu}(W^+))$. Da δ_2 wegen den Ergebnissen aus der Fredholm-Theorie in §3.3.2 abgeschlossenes Bild hat und $\mathcal{N} \subset L_{l-1}^2$ abgeschlossen ist, folgt, dass das Bild von DF abgeschlossen ist. Angenommen DF ist nicht surjektiv, dann gibt es wegen der Abgeschlossenheit von $\text{bild}(DF)$ ein $(\kappa, \psi) \in L_{l-1}^2$, welches orthogonal auf $\text{bild}(DF)$ steht. Durch Variation von η in (3.37) folgt, dass κ gleich Null sein muss. Da Φ nicht

global verschwindend ist (Definition von \mathcal{C}) und die elliptische (SW-)Dirac-Gleichung $D_A\Phi = 0$ erfüllt, kann Φ auf keiner offenen Teilmenge von X^+ verschwinden. Nun ergibt dies vermöge Variation von a , dass ψ gleich Null sein muss. Somit ist die Surjektivität von DF gezeigt. \square

Wir können mit den bisherigen Aussagen jetzt das Theorem 3.20 bis auf die Kompaktheitsaussage beweisen:

Satz 3.25 *Der Modulraum*

$$\mathcal{M}(\tilde{P}) \subset \mathcal{B} \times \mathcal{N}$$

ist eine glatte (evtl. unendlichdimensionale) Banach-Untermannigfaltigkeit. Die Projektion auf die \mathcal{N} -Koordinate

$$\pi_2 : \mathcal{M}(\tilde{P}) \rightarrow \mathcal{N}$$

ist eine glatte Fredholm-Abbildung, die an jeder Lösung $[A, \Phi] \in \mathcal{M}$

$$\dim(\ker(D\pi_2)) = \dim(\ker(\mathcal{D})), \quad \dim(\operatorname{coker}(D\pi_2)) = \dim(\operatorname{coker}(\mathcal{D})) \quad (3.38)$$

erfüllt.

Für eine Baire-Menge \mathcal{N}_0 bestehend aus Elemente $\eta \in \mathcal{N}$ ist die Abbildung $D\pi_2^{([A, \Phi])}$ für alle $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$ surjektiv. In diesem Fall gilt

$$\dim(\ker(D^{([A, \Phi])}\pi_2)) = \operatorname{ind}(\mathcal{D}) = \dim(\ker(\mathcal{D}^{([A, \Phi])})). \quad (3.39)$$

und es gilt, dass der Modulraum \mathcal{M}_η eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim(\ker(D^{([A, \Phi])}\pi_2))$ ist.

Beweis: Die Glattheit von $\mathcal{M}(\tilde{P})$ folgt aus Lemma 3.24 (bzw. obigen Betrachtungen) und der 'unendlich-dimensionalen Version' des impliziten Funktionensatzes. Als Urbild der 0 unter dem glatten SW-Funktionales F ist $\mathcal{M}(\tilde{P})$ in $\mathcal{B} \times \mathcal{N}$ abgeschlossen und somit folgt wegen der Vollständigkeit von \mathcal{B} und \mathcal{N} die behauptete Banacheigenschaft von $\mathcal{M}(\tilde{P})$.

Die glatte Projektion von $\mathcal{B} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, eingeschränkt auf \mathcal{M} , ergibt die Abbildung π_2 , die somit ebenfalls glatt ist. Per Definition gilt dann an einem beliebigen Punkt $(A, \Phi, \eta) \in \mathcal{M}$, dass

$$\ker(D\pi_2) = \ker(\delta_2)/\operatorname{bild}(\delta_1) = \ker(\mathcal{D})$$

ist. Wir wollen anmerken, dass es wegen Lemma 3.16 hierfür unerheblich ist, auf welcher L^2_k -Topologie δ_2 agiert.

Per Definition gilt, dass Elemente aus dem Co-Kern von $D\pi_2$ in Co-Kern von δ_2 liegt. Nun folgt aus der Endlichdimensionalität des Co-Kerns von

δ_2 die Endlichdimensionalität des Co-Kerns von $D\pi_2$, womit die Fredholm-Eigenschaft von π_2 bzw. $D\pi_2$ gezeigt ist. Per Definition ist $\ker(\mathcal{D}) = \ker(D\pi_2)$, was dann insgesamt

$$\dim(\ker(D\pi_2)) = \dim(\ker(\mathcal{D})), \quad \dim(\operatorname{coker}(D\pi_2)) \leq \dim(\operatorname{coker}(\mathcal{D})) \quad (3.40)$$

zeigt.

Nach dem Smale-Sard-Theorem (siehe [39]) gibt es also im Falle, dass

$$\operatorname{ind}(D\pi_2) \geq \operatorname{ind}(\mathcal{D}) \geq 0$$

gilt, eine Baire-Menge \mathcal{N}_0 bestehend aus Elemente $\eta \in \mathcal{N}$ von regulären Werten von π_2 . Sei nun $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$ für eines der $\eta \in \mathcal{N}$, so dass

$$D\pi_2^{([A, \Phi])} : L_l^2 \rightarrow L_{l-1}^2$$

surjektiv ist (beachte wieder, dass es wegen Lemma 3.16 hierfür unerheblich ist, auf welcher L_k^2 -Topologie δ_2 agiert). Ein analoges Transversalitätsargument, wie aus dem Beweis von Lemma 3.24, lässt darauf schließen, dass $\delta_2^{(A, \Phi)}$ surjektiv ist und wegen Theorem 3.8 gilt dann die behauptete Dimensionsformel (3.39). Da der Index der Fredholm-Abbildung \mathcal{D} nicht vom Fusspunkt abhängt, folgt mit der Existenz von regulären Werten und obiger Ungleichung (3.40) die behaupteten Identitäten (3.38).

Der Fakt, dass für reguläre Werte η der Modulraum \mathcal{M}_η glatt von der behaupteten Dimension ist, folgt wiederum aus dem impliziten Funktionensatz. Dies schliesst den Beweis ab. \square

3.4.3 Kompaktheit

Aufgrund der approximativen Flachheit auf dem Kegelende können wir erwarten, dass π_2 eine eigentliche Fredholm-Abbildung ist. Eine weitere wesentliche Zutat hierfür ist die Geschlossenheit von ω auf dem Kegelende, die bisher noch nicht benötigt wurde. Um die Eigentlichkeit von π_2 zu zeigen, argumentieren wir in drei Schritten. Zuerst werden wir für eine Lösung (A, Φ) der SW-Gleichungen eine gleichmäßige Abschätzung für $|\Phi|$ angeben, die nur von der Norm der Perturbation η abhängt. Als zweiten Schritt zeigen wir, dass eine Lösung der SW-Gleichungen auf dem Kegelende exponentiell abfällt. Die Konstanten im exponentiellen Abfall-Verhalten hängen nur von der Auswertung eines bestimmten 'Energiefunktionals' auf dieser Lösung ab. Anschließend werden wir eine gleichmäßige Schranke für das Energiefunktional für Lösungen der SW-Gleichungen angeben, was uns dann befähigen wird, den Beweis der Eigentlichkeit der Fredholm-Abbildung π_2 abzuschließen.

Lemma 3.26 *Es existieren Konstanten $\kappa_1, \kappa_2 > 0$, die nur von X^+ abhängen, so dass für eine beliebige Lösung $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$ (für ein $\eta \in \mathcal{N}$)*

$$\sup_{x \in X^+} |\Phi(x)|^2 \leq \kappa_1 \|\eta\|_{C^0} + \kappa_2$$

gilt.

Beweis: Wir führen zunächst den Laplace-Operator $\Delta : L_t^2 \rightarrow L_{t+1}^2$ mittels

$$\Delta = d^*d$$

ein. Sei $\Phi \in L_t^2(W^+)$. Da $l \geq 4 > 2$ so gewählt war, dass $\Phi \in C^2$ (siehe §3.2.1) ist und da $\Phi - \Phi_0 \in \bar{L}_t^2$ gilt, konvergiert die punktweise Norm von $|\Phi - \Phi_0|$ gegen Null wenn die t -Koordinate des Kegeldes gegen Unendlich geht. Falls $|\Phi|$ jemals größer als Null wird, nimmt es sein globales Maximum an einem Punkt $x \in X^+$ an und an diesem Punkt gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \Delta |\Phi|^2 \\ &= \langle \nabla_A^* \nabla_A \Phi, \Phi \rangle - \langle \nabla_A \Phi, \nabla_A \Phi \rangle \\ &\leq \langle \nabla_A^* \nabla_A \Phi, \Phi \rangle \\ &= \langle D_A D_A \Phi, \Phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \rho(F_A^+) \Phi, \Phi \rangle - \frac{s}{4} \langle \Phi, \Phi \rangle \\ &= -\frac{1}{4} |\Phi|^4 - \frac{1}{2} \langle (\rho(F_{A_0}^+) - \{\Phi_0 \otimes \Phi_0^*\}) \Phi, \Phi \rangle - \frac{1}{2} \langle \rho(\eta) \Phi, \Phi \rangle - \frac{s}{4} \langle \Phi, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung gilt, da ∇_A vom Levi-Civita-Zusammenhang induziert wird. Die zweite Gleichung folgt aus der Weitzenböckformel (3.28). Die dritte Gleichung folgt, da (A, Φ) die Seiberg-Witten-Gleichungen (3.6) und (3.7) erfüllt und

$$\{\Phi \otimes \Phi^*\} \Phi = \frac{1}{2} |\Phi|^2 \Phi$$

gilt. Da auf X^+ die Krümmungsterme $F_{\hat{A}_0}$ und s (siehe Theorem 3.1) und der kanonische Spinor Φ_0 beschränkt sind, folgt das Ergebniss durch Addieren von $\frac{1}{4} |\Phi|^4$ und anschließendes Dividieren durch $\frac{1}{4} |\Phi|^2$ auf beiden Seiten in obiger Ungleichung. \square

3.4.3.1 Umformulierung der SW-Gleichungen auf dem Kegelde

Ausserhalb eines Kompaktums $K \supset X$ ist unsere $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X^+$ isomorph zur kanonischen $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P}_0 \rightarrow [1, \infty) \times \partial X$ (siehe Definition 3.1). Es gilt also ausserhalb von K

$$W^+ \cong \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}.$$

Soweit nicht anders angegeben, sind alle nun folgenden Betrachtungen ausserhalb von K zu sehen. Wir werden nun über diesem Teil von X^+ die Seiberg-Witten-Gleichungen geschickt umformulieren, in dem wir diese spezielle Gestalt von W^+ im 'fast-komplexen' Fall ausnutzen.

Definition 3.10 Wir bezeichnen mit ∂_B bzw. mit $\bar{\partial}_B$ den $(1,0)$ -Anteil bzw. den $(0,1)$ -Anteil der äusseren Ableitung

$$d_B : C^2(\Lambda^{*,*}(T^*(X^+ \setminus K)) \otimes \mathbb{C}; \mathcal{L}') \rightarrow C^1(\Lambda^{*,*}(T^*(X^+ \setminus K)) \otimes \mathbb{C}; \mathcal{L}'),$$

die von einem $U(1)$ -Zusammenhang B auf dem komplexen Linienbündel \mathcal{L}' induziert wird.

Sei $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$. Wir schreiben $A = A_0 + a$, wobei wir die 1-Form $a \in C^2(iT^*X)$ als Zusammenhang auf dem trivialen Linienbündel ansehen. Weiterhin schreiben wir vermöge obiger Identifikation

$$\Phi = (\alpha, \beta) \in \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}.$$

Als Konvention legen wir im folgenden für Konfigurationen ausserhalb von K die Schreibweise (a, α, β) fest.

Lemma 3.27 *Mit dieser Konvention gilt für $(\alpha, \beta) \in L^2_l(\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2})$, dass*

$$D_A(\alpha, \beta) = \sqrt{2} \left(\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial}_a^* \beta \right)$$

ist.

Beweis: Der kanonische $Spin^c$ -Zusammenhang A_0 auf $\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ war durch $D_{A_0} \Phi_0 = 0$ definiert und muss daher wegen (2.7), (2.1) und $\Phi_0 \equiv 1$ gleich dem äusseren Differential d auf $\Lambda^* T^*(X^+ \setminus K)$ sein.

Dies führt wieder mit (2.7) und (2.1) zu

$$D_{A_0+a} \alpha = \sqrt{2} \bar{\partial}_a \alpha$$

und

$$D_{A_0+a} \beta = \sqrt{2} \bar{\partial}_a^* \beta,$$

was den Beweis abschliesst. \square .

Mit diesem Lemma wird die zweite SW-Gleichung (3.7) dann für $(\alpha, \beta) \in L^2_l(\Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2})$ zu

$$\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial}_a^* \beta = 0. \tag{3.41}$$

Nun schreiben wir die erste SW-Gleichung (die Krümmungsgleichung) geeignet in Abhängigkeit von (a, α, β) um. Da die symplektische Form ω aus der zulässigen Struktur (siehe Beweis von Proposition 2.12 — $\omega = \langle \cdot, J \cdot \rangle$) eine selbstduale (1,1)-Form ist, kombiniert mit der Tatsache, dass der Raum der selbstdualen 2-Formen faserweise die Dimension 3 hat, gilt

$$L^2(\Lambda^{2,+}) \subset L^2(\mathbb{C}) \cdot \omega \oplus L^2(\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}).$$

Wir machen mit $L^2(\mathfrak{isu}(W^+)) (= L^2(i\Lambda^{2,+}))$ weiter und sehen also, dass

$$L^2(\mathfrak{isu}(W^+)) = L^2(i\mathbb{R}) \cdot \omega \oplus \{\mu - \bar{\mu} \mid \mu \in L^2(\Lambda^{0,2})\} \quad (3.42)$$

gilt. Wir untersuchen nun, welche (faserweise) Matrixdarstellung ω in $\mathfrak{isu}(W^+)$ hat.

Da ω eine symplektische Form ist, können wir lokal eine ON-Basis (x_1, y_1, x_2, y_2) mit $Jx_i = y_i, i = 1, 2$ finden, so dass

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$$

gilt. In der Clifford-Algebra $Cl(T(X^+ \setminus X)) = \Lambda^*$ wird ein solches Element aufgrund der Orthogonalität durch

$$dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2$$

repräsentiert.

Für ω gilt:

1. Die Wirkung von ω auf $\Lambda^{0,0}$ ist per Definition (2.1) durch Multiplikation (Dachprodukt) mit $-\frac{i}{\sqrt{2}}(d\bar{z}_1 + d\bar{z}_2)$, gefolgt von der Kontraktion mit $-\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{z}_1 + d\bar{z}_2)$ gegeben, ist also gleich der Multiplikation mit $2i$;
2. Die Wirkung von ω auf $\Lambda^{0,2}$ ist auf analoge Weise durch Kontraktion mit $\frac{i}{\sqrt{2}}(d\bar{z}_1 + d\bar{z}_2)$, gefolgt von der Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{z}_1 + d\bar{z}_2)$ gegeben, ist also gleich der Multiplikation mit $-2i$.

Also hat ω in $\mathfrak{isu}(W^+)$ global die Matrixdarstellung

$$w = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Nun folgt ebenfalls wegen (2.1) durch eine analoge Betrachtung für $\mu - \bar{\mu}$ mit $\mu \in L^2(\Lambda^{0,2})$ die Matrixdarstellung

$$\mu - \bar{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -2(*\mu) \\ 2(*\mu) & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern uns, dass für ein Element $\Phi = (\alpha, \beta)$ der spurfreie Anteil von $\Phi \otimes \Phi^*$ durch

$$\{\Phi \otimes \Phi^*\} = \Phi \otimes \Phi^* - \frac{|\Phi|^2}{2} \text{Id} = \begin{pmatrix} \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} & \alpha(*\bar{\beta}) \\ \bar{\alpha}(*\beta) & \frac{|\beta|^2 - |\alpha|^2}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet werden kann.

Schreiben wir nun gemäß obiger Zerlegung (3.42) von $L^2(i\mathfrak{su}(W^+))$ für die Perturbation $\eta = -i\eta_0\omega + (\eta_1 - \bar{\eta}_1)$, wird nach den vorangegangenen Betrachtungen die erste SW-Gleichung (3.6) zu folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2iF_a^\omega - \frac{1}{4}(1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2) &= \eta_0 \\ 2F_a^{0,2} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}\beta &= \eta_1. \end{aligned} \tag{3.43}$$

3.4.3.2 Das Energie-Funktional

Definition 3.11 Für ein beliebige (messbare) Menge $U \subset X^+ \setminus K$ definieren wir die Energie einer Konfiguration $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ über U durch

$$E_U(A, \Phi) = \int_U \left((1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + |\beta|^2 + |\nabla_a \alpha|^2 + |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 \right).$$

Es sei wieder $A = A_0 + a$ und $\Phi = (\alpha, \beta) \in \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$. Weiterhin sei ∇_a die Kovariante Ableitung zum Zusammenhang a auf dem trivialen Linienbündel $\Lambda^{0,0}$ und es sei $\tilde{\nabla}_a$ der eindeutige unitäre Zusammenhang auf $\Lambda^{0,2}$, dessen $(1,0)$ -Anteil gleich ∂_a ist; wir meinen damit, dass unter der Identifikation $\Lambda^{1,0} \otimes \Lambda^{0,2} = \Lambda^{1,2}$ die Operatoren $\partial_a|_{\Lambda^{0,2}}$ und $(\tilde{\nabla}_a|_{\Lambda^{0,2}})^{1,0}$ gleich sind.

Das grundlegende Resultat, das wir nun brauchen und dessen Beweis wir auf den letzten Unterabschnitt §3.4.3.3 verschieben, ist das exponentielle Abfallverhalten bei endlicher Energie:

Satz 3.28 Für beliebige Konstanten $E_0, N_0 > 0$ existieren Konstanten $\epsilon, C > 0$ nur abhängig von X^+ , E_0 und N_0 , so dass für jede Lösung $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$ mit $E_{X^+ \setminus X}(A, \Phi) < E_0$ und $\|\eta\|_{\mathcal{N}} < N_0$

$$(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + |\beta|^2 + |\nabla_a \alpha|^2 + |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 \leq CN_0^{-\epsilon\sigma}$$

gilt, wobei σ eine Funktion $X^+ \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist, die nur von t abhängt und für $t \rightarrow \infty$ gegen Unendlich geht. \square

Ein wichtiges Korollar, dass uns nicht zuletzt erlauben wird, partiell zu integrieren ist:

Korollar 3.29 *Sei $[A', \Phi'] \in \mathcal{M}_\eta$ eine Lösung. Dann existiert ein Eichrepräsentant $(A, \Phi) \in [A', \Phi']$, so dass $A - A_0$ sowie $\Phi - \Phi_0$ mit seinen ersten Ableitungen $\nabla_a \alpha$ und $\tilde{\nabla}_a \beta$ entlang dem Kegelende exponentielles Abfallverhalten haben.*

Beweis: Sei $(A', \Phi') \in \mathcal{C}$ ein beliebiger Eichrepräsentant der Lösung. Wir können nach Definition von \mathcal{C} die Konfiguration (A', Φ') in der L^2 -Topologie durch glatte Konfigurationen (A_1, Φ_1) , die für $t > T_0$ entlang dem Kegelende gleich der kanonischen Konfiguration (A_0, Φ_0) sind, approximieren. Wie durch das Slice-Theorem aus Bemerkung 3.23 begründet, können wir (A', Φ') für ein geeignetes $\sigma \in \mathcal{G}$ in Coulomb-Eichung $(A, \Phi) = (A', \Phi') \cdot \sigma$ bringen. Sei $S \times \mathcal{G}$ eine Zerlegung um (A, Φ) nach dem Slice-Theorem. Wir wählen die Approximation von (A, Φ) durch (A_1, Φ_1) so gut, dass $(A_1, \Phi_1) \cdot \sigma' \in S$ für ein $\sigma' \in \mathcal{G}$ gilt. Also erfüllt (A, Φ) die *Coulomb-Bedingung*

$$\delta_1^*(A - A_1, \Phi - \Phi_1) = 0$$

für die Linearisierung δ_1 der Eichtransformation an der Konfiguration (A_1, Φ_1) . Nach dem Sobolev-Multiplikations-Theorem 3.2.(iv) ist $(A_1, \Phi_1) - (A_0, \Phi_0) \in L^2_{l+1}$ und somit gilt für die Linearisierung δ_1 an der Konfiguration (A_0, Φ_0) , dass wegen der expliziten Formel (3.13) für δ_1^* und der obigen Coulomb-Eichung

$$\delta_1^*(A - A_0, \Phi - \Phi_0) = i\text{Im}((\Phi_1 - \Phi_0)^*(\Phi - \Phi_0)) + \delta_1^*(A_1 - A_0, \Phi_1 - \Phi_0)$$

in L^2_l liegt. Wir wollen nun zeigen, dass auch $\delta_2(A - A_0, \Phi - \Phi_0)$ in L^2_l liegt (wobei δ_2 auf dem Tangentialraum an (A_0, Φ_0) operiere). Nach der Formel (3.12) für δ_2 müssen wir dabei lediglich sehen, dass

$$D_{A-A_0}(\Phi - \Phi_0) \in L^2_l \quad (3.44)$$

und

$$d^+ a \in L^2_l \quad (3.45)$$

(wobei wieder $a = A - A_0$ sei) gilt. Benutzen wir Lemma 2.5 und dass (A, Φ) sowie (A_0, Φ_0) Lösung der zweiten SW-Gleichung (3.7) sind, sehen wir (3.44) bestätigt. Da (A, Φ) ein Element aus \mathcal{M}_η ist, folgt wegen Lemma 2.5 und der ersten SW-Gleichung (3.6), dass $d^+ a$ dieselbe Regularität wie die Perturbation η hat, welche in C^r für $r \geq l$ liegt - also haben wir auch (3.45) gezeigt. Daher gilt

$$\mathcal{D}^{(A_0, \Phi_0)}(A - A_0, \Phi - \Phi_0) \in L^2_l,$$

was wiederum nach Lemma 3.16

$$(A - A_0, \Phi - \Phi_0) \in L_{l+1}^2 \quad (3.46)$$

impliziert.

Satz 3.28 zeigt uns, dass die Eich-invarianten Größen $1 - |\alpha|^2$, $|\nabla_a \alpha|^2$, $|\tilde{\nabla}_a \beta|^2$ und $|\beta|^2$ exponentielles Abfallverhalten haben. Um die Eich-Invarianz von $|\nabla_a \alpha|^2$ und $|\tilde{\nabla}_a \beta|^2$ zu sehen, benutze man, dass $\nabla_{a-u^{-1}du} u \alpha = u \nabla_a \alpha$ und $\tilde{\nabla}_{a-u^{-1}du} u \beta = u \tilde{\nabla}_a \beta$ gilt. Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass es eine Eichtransformation $u \in \mathcal{G}$ gibt, so dass der Ausdruck $a - u^{-1}du$ exponentielles Abfallverhalten entlang dem Kegelende besitzt, da dann wegen $\nabla_a(1 - \alpha) = a - \nabla_a \alpha$ der Eichrepräsentant $(A, \Phi) \cdot u - (A_0, \Phi_0)$ mit den ersten Ableitungen das gewünschte exponentielle Abfallverhalten besitzt. Wir wissen, dass α ausserhalb eines Kompaktums $K_1 \supset X$ ungleich 0 ist. Wir finden also eine eindeutige Abbildung $u : X^+ \setminus K_1 \rightarrow S^1$ mit

$$\frac{u\alpha}{|\alpha|} = 1.$$

Wegen (3.46) ist $1 - \alpha \in L_{l+1}^2$ und somit ist wegen dem Sobolev-Multiplikations-Theorem und der Kato-Ungleichung (siehe Theorem 3.2)

$$1 - u \in L_{l+1}^2(X^+ \setminus K_1).$$

Da sich u also im Unendlichen des Kegelendes der konstanten 1-Abbildung annähert, ist u im Raum der Eichtransformationen auf $X^+ \setminus K_1$ homotop zur konstanten Abbildung auf die 1 (l war so gewählt, dass $L_l^2 \subset C^2$ gilt), somit kann u auf ganz X^+ fortgesetzt, so dass $u|_X \equiv 1$ gilt. Also ist wegen (3.5) $u \in \mathcal{G}$. Wir leiten also

$$\begin{aligned} a - u^{-1}du &= a - \frac{\alpha}{|\alpha|} \left(\frac{d|\alpha|}{\alpha} + |\alpha| \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) d\alpha \right) \\ &= u \frac{(\nabla_a \alpha)}{|\alpha|} - \frac{\nabla|\alpha|}{|\alpha|} \end{aligned}$$

ab. Daraus folgern wir, dass

- $|u| \equiv 1$ ist,
- $|\nabla_a \alpha|$ wegen Satz 3.28 exponentielles Abfallverhalten hat,
- $|\alpha|$ wegen $1 - \alpha \in L_l^2$ nach unten beschränkt ist,
- $|\nabla \alpha|$ wegen der zweiten SW-Gleichung $D_{A_0+a}(\alpha, \beta) = 0$ und dem exponentiellen Abfallverhalten von β und Lemma 2.5 exponentielles Abfallverhalten hat.

Dies schliesst den Beweis ab. \square

Man kann zeigen, dass die Energie einer Lösung im wesentlichen nur durch die Perturbation $\eta \in \mathcal{N}$ beschränkt wird:

Satz 3.30 *Es existieren Konstanten $\kappa_3, \kappa_4 > 0$, die nur von X^+ abhängen, so dass für alle Lösungen $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$*

$$E_{X^+ \setminus X}(A, \Phi) \leq \kappa_3 \|\eta\|_{\mathcal{N}}^2 + \kappa_4$$

gilt.

Zum Beweis für diesen Satz brauchen wir folgendes Lemma, welches die spezielle Situation der Existenz einer symplektischen Struktur und davon insbesondere die Geschlossenheit auf dem Kegelende ausnutzt (vgl. [44] und [43]):

Lemma 3.31 *Sei $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$, so dass $a = A - A_0$ und $(\alpha, \beta) = \Phi - \Phi_0$ mit seinen ersten Ableitungen $\nabla_a \alpha$ und $\tilde{\nabla}_a \beta$ entlang dem Kegelende exponentielles Abfallverhalten hat.*

Auf $X^+ \setminus X$ gilt dann die Identität

$$\begin{aligned} & \int_{X^+ \setminus X} (|\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial}_a^* \beta|^2 + 4|iF_a^\omega - \frac{1}{8}(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)|^2 + 4|F^{0,2} - \frac{1}{4}\bar{\alpha}\beta|^2 \\ & \quad + iF_a^\omega - 4|iF_a^\omega|^2 - 4|F_a^{0,2}|^2) \\ &= \int_{X^+ \setminus X} \left(\frac{1}{2}(|\nabla_a \alpha|^2 + |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 + 2\langle iF_{\tilde{\nabla}}^\omega \beta, \beta \rangle) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{16}(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \frac{1}{4}|\beta|^2 - 2\langle N \circ \partial_a \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}} \right). \quad (3.47) \end{aligned}$$

Es bezeichne dabei

$$N : \Lambda^{1,0} \rightarrow \Lambda^{0,2}, \alpha \rightarrow (d\alpha)^{0,2}$$

den Nijenhuis-Tensor der fast komplexen Struktur J und $F_{\tilde{\nabla}}^\omega = \langle F_{\tilde{\nabla}}, \omega \rangle$, wobei $F_{\tilde{\nabla}}$ die Krümmung des Levi-Civita-Zusammenhangs $\tilde{\nabla}$ auf dem Bündel der $\Lambda^{0,2}$ -Formen sei.

Wir brauchen zwei Zwischenergebnisse, um dieses Lemma zu beweisen.

Lemma 3.32 *Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.31. Sei*

$$\Lambda : L^2(\Lambda^{p,q}) \rightarrow L^2(\Lambda^{p-1,q-1})$$

der zur Wedge-Multiplikation mit ω formal adjungierte Operator (der für eine $(1,1)$ -Form γ die Gleichung $\Lambda\gamma = \langle \gamma, \omega \rangle$ erfüllt). Dann gelten für komplex- und $\Lambda^{0,2}$ -wertigen $(0,1)$ und $(0,2)$ - bzw. $(1,0)$ -Formen mit Träger in $X^+ \setminus X$ und exponentiellen Abfallverhalten (entlang dem Kegelende) die Identitäten

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_a^* &= -i[\partial_a, \Lambda] \text{ bzw.} \\ \partial_a^* &= i\Lambda\bar{\partial}_a \end{aligned} \quad (3.48)$$

Beweis: Es gilt $-*\bar{\partial}_a^* = i\Lambda\partial_a$ und $-*\partial_a^* = -i[\bar{\partial}_a, \Lambda]$ für allgemeine Kählerformen ω und $\Lambda = (\omega \wedge \cdot)^*$ für $(0,1)$, $(0,2)$ - bzw. $(1,0)$ -Formen (siehe z.B. [8, §6.1.3]). Für eine p -Form α' und eine $(p-1)$ -Form β' gilt (vgl. [22, §2.1])

$$d_a(\alpha' \wedge *\beta') = \pm * (\langle d_a\alpha', \beta' \rangle + \langle \alpha', *d_a*\beta' \rangle),$$

wobei d_a die äussere Ableitung beschreibt, die durch den unitären Zusammenhang ∇_a bzw. $\tilde{\nabla}_a$ auf dem jeweils betrachteten Bündel induziert wird.

Die behauptete Identitäten auf $X^+ \setminus X$ folgen nun mit obiger Gleichung und Stokes, sofern wir zeigen können, dass wir Stokes in dieser nicht-kompakten Situation anwenden dürfen. Daher bleibt noch zu zeigen, dass für eine 3-Form γ , die in $X^+ \setminus X$ getragen wird und die exponentielles Abfallverhalten entlang dem Kegelende besitzt,

$$\int_{X^+ \setminus X} d\gamma = 0$$

gilt. Sei für alle $k > 1$ ρ_k eine Abschneidefunktion, die für $1 \leq t \leq k$ konstant gleich 1 ist und in $[1, t+1] \times \partial X$ getragen wird. Wir können oBdA. voraussetzen, dass $d\rho_k \perp T^*(\partial X)$ gilt und somit alle $d\rho_k$ in k als gleichmäßig beschränkt vorausgesetzt werden können. Dann gilt wegen Stokes

$$0 = \int_{\{1\} \times \partial X} \gamma = \int_{X^+ \setminus X} d\rho_k \wedge \gamma + \int_{X^+ \setminus X} \rho_k d \wedge \gamma.$$

Aufgrund des exponentiellen Abfallverhaltens von γ und der gleichmäßigen Beschränktheit von ρ_k gilt, dass die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen $\int_{X^+ \setminus X} d\gamma$ konvergiert. Dies schliesst den Beweis für (3.48) ab. \square

Jetzt leiten wir daraus Identitäten ab, die wir für den Beweis von Gleichung (3.47) brauchen werden:

Lemma 3.33 *Es gelten mit den selben Voraussetzungen wie in Lemma 3.31 die Identität*

$$\nabla_a^* \nabla_a \alpha = 2\bar{\partial}_a^* \bar{\partial}_a \alpha - 2F_a^\omega \alpha \quad (3.49)$$

und die Identität

$$\tilde{\nabla}_a^* \tilde{\nabla}_a \beta = 2\bar{\partial}_a \bar{\partial}_a^* \beta + 2iF_{\tilde{\nabla}_a}^\omega \beta - 2iF_a^\omega \beta \quad (3.50)$$

Beweis: 1. Mit (3.48) gilt für $\alpha \in \Lambda^{0,0}$ (mit exponentiellem Abfallverhalten entlang dem Kegellende)

$$\begin{aligned} \nabla_a^* \nabla_a \alpha &= (\partial_a - \bar{\partial}_a)(\partial_a + \bar{\partial}_a)\alpha \\ &= i\Lambda(\partial_a \bar{\partial}_a - \bar{\partial}_a \partial_a)\alpha \end{aligned} \quad (3.51)$$

und

$$i\Lambda(\partial_a \bar{\partial}_a + \bar{\partial}_a \partial_a)\alpha = i\langle F_a, \omega \rangle \alpha = 2F_a^\omega \alpha, \quad (3.52)$$

was mit (3.48) und

$$F_a = \bar{\partial}_a \bar{\partial}_a + \bar{\partial}_a \partial_a + \partial_a \bar{\partial}_a + \partial_a \partial_a$$

auf

$$\begin{aligned} \nabla_a^* \nabla_a \alpha &= 2i\Lambda \partial_a \bar{\partial}_a \alpha - 2F_a^\omega \alpha \\ &= 2\bar{\partial}_a^* \bar{\partial}_a \alpha - 2F_a^\omega \alpha \end{aligned} \quad (3.53)$$

schließen lässt, was (3.49) zeigt.

2. Nun ist mit (3.48) für eine $(0, 2)$ -Form β

$$\bar{\partial}_a \bar{\partial}_a^* \beta = \bar{\partial}_a i\Lambda \partial_a \beta = \partial_a^* \partial_a \beta. \quad (3.54)$$

Die Identitäten (3.51) und (3.52) aus 1. und die Tatsache, dass (3.48) auch für das Bündel $\Lambda^{0,2}$ gilt, liefern uns

$$\tilde{\nabla}_a^* \tilde{\nabla}_a \beta = 2\partial_a^* \partial_a \beta + 2iF_{\tilde{\nabla}_a}^\omega \beta,$$

was mit (3.54) zu

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a^* \tilde{\nabla}_a \beta &= 2\bar{\partial}_a \bar{\partial}_a^* \beta + 2iF_{\tilde{\nabla}_a}^\omega \beta \\ &= 2\bar{\partial}_a \bar{\partial}_a^* \beta + 2iF_{\tilde{\nabla}_a}^\omega \beta - 2iF_a^\omega \beta \end{aligned} \quad (3.55)$$

führt und (3.50) zeigt. \square

Beweis von Lemma 3.31: Nach Definition der Krümmung gilt, dass

$$F_a^{0,2} \alpha = (\bar{\partial}_a \bar{\partial}_a \alpha)^{0,2} + (d(\partial_a \alpha))^{0,2} = (\bar{\partial}_a \bar{\partial}_a \alpha)^{0,2} + N \circ \partial_a \alpha \quad (3.56)$$

ist (beachte, dass der auf den ersten Blick zu fehlen scheinende Term $(\partial_a \bar{\partial}_a \alpha)^{0,2}$ gleich 0 ist, da ∂_a Bild in $\Lambda^{\geq 1,*}$ hat).

Wir können nun mit (3.49), (3.50) aus Lemma 3.33 und (3.56)

$$\begin{aligned} \int_{X^+ \setminus X} |\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial}_a^* \beta|^2 &= \int_{X^+ \setminus X} \left(\langle \bar{\partial}_a^* \bar{\partial}_a \alpha, \alpha \rangle + \langle \bar{\partial}_a \bar{\partial}_a^* \beta, \beta \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \bar{\partial}_a \alpha, \bar{\partial}_a^* \beta \rangle + \langle \bar{\partial}_a^* \beta, \bar{\partial}_a \alpha \rangle \right) \\ &= \int_{X^+ \setminus X} \left(\frac{1}{2} (|\nabla_a \alpha|^2 + |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 + 2 \langle i F_{\tilde{\nabla}}^\omega \beta, \beta \rangle) + \underbrace{i F_a^\omega (|\alpha|^2 - |\beta|^2)}_{=: Term_1} \right. \\ &\quad \left. - 2 \langle N \circ \partial_a \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}} + \underbrace{\langle F_a^{0,2}, \bar{\alpha} \beta \rangle + \langle \bar{\alpha} \beta, F_a^{0,2} \rangle}_{:= Term_2} \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

errechnen. Zum Schluss rechnen wir

$$\begin{aligned} 4 |i F_a^\omega - \frac{1}{8} (1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2)|^2 + i F_a^\omega - 4 |i F_a^\omega|^2 &= \\ \frac{1}{16} (1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \frac{1}{4} |\beta|^2 - \underbrace{Term_1 - \frac{1}{4} |\alpha|^2 |\beta|^2}_{:= Term_3} \end{aligned} \quad (3.58)$$

und

$$2 |F_a^{0,2} - \frac{1}{4} \bar{\alpha} \beta|^2 - 2 |F_a^{0,2}|^2 = -Term_2 - Term_3 \quad (3.59)$$

aus. Addieren von (3.57), (3.58) und (3.59) schliesst dann den Beweis ab. \square

Beweis von Satz 3.30: Wir wählen Kompakta $K^1 = X \subset K^2 \subset K^3$, so dass auf $X^+ \setminus K^2$ punktweise

$$|N| \leq \frac{1}{32}$$

(dann gilt $|N \partial_a \alpha| \leq \frac{1}{32} |\partial_a \alpha|$, wegen der Orthogonalität zwischen den (1,0) und (0,1)-Formen) und

$$|F_{\tilde{\nabla}}^\omega| < \frac{3}{64}$$

gilt. Wir erklären zuerst, warum dies möglich ist: Es sei γ eine beliebige (0,1)-Form auf dem Kegelende. Da für eine beliebige glatte, reellwertige Funktion f auf dem Kegelende

$$N(f\gamma) = d(f\gamma)^{0,2} = \underbrace{(df \wedge \gamma)^{0,2}}_{=0} + f(d\gamma)^{0,2} = fN(\gamma)$$

gilt, hängt die punktweise Norm des Nijenhuis-Tensors N nur von den Ableitungen der (1,0)-Formen dz_1 und dz_2 ab, wobei wir die dz_i lokal in einer

Kartenumgebung $[1, \infty) \times U$ auf dem Kegelde bezüglich der fast komplexe Struktur definieren. Für ihre Ableitungen in die von t verschiedenen Richtungen gilt, dass diese mindestens mit den Faktor $1/t$ abfallen. Für die Ableitung in t -Richtung mit anschließender Projektion auf den $(0,2)$ -Anteil gilt dies ebenfalls wegen (3.2). Somit nimmt die Norm des Nijenhuis-Tensors entlang dem Kegelde (punktweise) mit dem Faktor $1/t$ ab. Die approximative Flachheit auf dem Kegelde begründet dann noch die behauptete Beschränkung von $|F_{\tilde{\nabla}}^\omega|$.

Wir wählen nun noch eine Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$, die in $X^+ \setminus K^2$ getragen wird und auf $X^+ \setminus K^3$ konstant gleich 1 ist. Sei $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_\eta$ und (A, Φ) ein Repräsentant mit exponentiellem Verhalten wie in Korollar 3.29 und wir setzen $(A, \bar{\Phi}) = (A, \zeta\Phi) = (a, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ um die Integral-Gleichung (3.47) anwenden zu können. Wir erinnern uns noch kurz an die Peter-Paul-Ungleichung, die besagt, dass für $x, y, \epsilon > 0$ die Ungleichung

$$xy \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\epsilon}y^2 \quad (3.60)$$

gilt. Diese Ungleichung mit $\epsilon = 8$ ermöglicht uns mit der Wahl von K^2 folgende punktweise Abschätzung auf $X^+ \setminus K^2$

$$\begin{aligned} |\langle N \circ \partial_a \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle| &\leq 2 \cdot \frac{1}{32} |\nabla_a \bar{\alpha}| |\beta| \leq \frac{1}{4} |\nabla_a \bar{\alpha}|^2 + \frac{1}{16 \cdot 16} |\bar{\beta}|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} |\nabla_a \bar{\alpha}|^2 + \frac{1}{64} |\bar{\beta}|^2 \end{aligned}$$

und

$$|\langle iF_{\tilde{\nabla}}^\omega \bar{\beta}, \bar{\beta} \rangle| \leq \frac{3}{64} |\bar{\beta}|^2.$$

Nimmt man zusätzlich hinzu, dass ζ in $X^+ \setminus K^2$ getragen wird und auf $X^+ \setminus K^3$ konstant 1 ist, ist die rechte Seite der Integral-Gleichung (3.47) für $(a, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ eine obere Schranke von

$$E'(a, \alpha, \beta) := \int_{X^+ \setminus K^3} \left(\frac{1}{4} |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{1}{2} |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 + \frac{1}{32} (1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \frac{1}{16} |\beta|^2 \right).$$

Dieses Integral ist bis auf eine Konstante gleich der Energie $E_{X^+ \setminus K^3}(A, \Phi)$. Wegen Lemma 3.31, den SW-Gleichungen (3.41) und (3.43) und der Tatsache, dass $\zeta|_{X^+ \setminus K^3} \equiv 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} E'(a, \alpha, \beta) &\leq \int_{X^+ \setminus K^3} \left(\frac{1}{2} (|\eta_0|^2 + |\eta_1|^2) + \frac{1}{2} iF_a^\omega - 2|iF_a^\omega|^2 - 2|F_a^{0,2}|^2 \right) \\ &\quad + \text{Rest}(a, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Wobei der $\text{Rest}(a, \alpha, \beta)$ -Term durch das Integral der linken Seite der Gleichung (3.47) eingeschränkt auf $K^3 \setminus X$ gegeben ist. Wir werden uns zunächst

um den Rest-Term kümmern. Wegen der Präkompaktheit von $K^3 \setminus X$ und den Gleichungen (3.43) und Lemma 3.26 existiert eine Konstante κ_R , die nur von (X^+, g) abhängt, so dass

$$\text{Rest}(a, \alpha, \beta) \leq \kappa_r (\|\eta\|_{C^0}^2 + |(\bar{\partial}_a + \bar{\partial}_a^*)(\zeta(\alpha + \beta|^2))|)$$

gilt. Wegen der Produkt-Regel

$$(\bar{\partial}_a + \bar{\partial}_a^*)(\zeta(\alpha + \beta)) = \zeta(\bar{\partial}_a + \bar{\partial}_a^*)(\alpha + \beta) + \rho(d\zeta) \cdot (\alpha + \beta),$$

die aus (2.7) folgt, und der Tatsache, dass wegen der SW-Gleichung (3.41)

$$(\bar{\partial}_a + \bar{\partial}_a^*)(\alpha + \beta) = 0$$

ist, schließen wir aus Lemma 3.26, dass es eine nur von X^+ (und ζ , welches unabhängig von der Lösung (A, Φ) ist) abhängige Konstante κ'_R gibt, so dass

$$\text{Rest}(a, \alpha, \beta) \leq \kappa'_R \|\eta\|_{C^0}^2$$

gilt. Zusammen mit (3.61) existieren nur von X^+ abhängige Konstante $\kappa, \kappa' > 0$, die

$$E'(a, \alpha, \beta) \leq \kappa \|\eta\|_{C^0}^2 + \kappa' + \int_{X^+ \setminus K^3} \frac{1}{2} i F_a^\omega$$

erfüllen. Da ω selbst-dual ist, ist der Integrand auf der rechten Seite gleich $\frac{i}{2} da \wedge \omega$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß mit $\text{oBdA } [N, \infty) \times \partial X = X^+ \setminus K^3$ und sei für alle $k > N + 1$ die Funktion ρ_k eine Abschneide-Funktion, die in $[N, k + 1] \times \partial X$ getragen wird und auf $[N, k] \times \partial X$ konstant gleich 1 ist. Dann gilt wegen partieller Integration

$$\frac{i}{2} \int_{X+K^3} da \wedge (\rho_k \omega) = \frac{i}{2} \int_{\partial K^3} a \wedge \omega - \int a \wedge d(\rho_k \omega).$$

Da ω geschlossen ist und konstante Länge $\sqrt{2}$ hat und man wie im Beweis von Lemma 3.31 oBdA. alle ρ_k mit in k gleichmäßig beschränkten Ableitungen wählen kann, konvergiert die rechte Seite für $k \rightarrow \infty$ wegen dem exponentielle Abfallverhalten von $a = A - A_0$ gegen

$$\frac{i}{2} \int_{\partial K^3} a \wedge \omega.$$

Also gilt

$$\frac{i}{2} \int_{X+K^3} da \wedge (\omega) = \frac{i}{2} \int_{\partial K^3} a \wedge \omega.$$

Da ω eine (1,1)-Form ist, ist die erste Gleichung der SW-Krümmungsgleichung (3.43) elliptisch und daher folgt mit elliptischer Regularität, dass es nur von ∂K^3 abhängigen Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so dass

$$\|a\|_{L^2} \leq C_1 (\|\alpha\|^2 + \|\beta^2\|_{L^2} + \|\eta\|)_{L^2} + C_2$$

gilt. Aus dieser Ungleichung folgt wegen der Kompaktheit von $\partial K^3 = \partial X \times \{N\}$ und wegen Lemma 3.26, dass nur von X^+ abhängige Konstanten κ'_3, κ'_4 existieren, so dass

$$E_{X^+ \setminus K^3}(A, \Phi) \leq \kappa'_3 \|\eta\|_{\mathcal{N}}^2 + \kappa_4$$

gilt. Die Energie $E_{K^3 \setminus X}(A, \Phi)$ ist ebenfalls wegen Lemma 3.26 auf dieselbe Weise mit eventuell anderen Konstanten beschränkt. Dies schliesst den Beweis ab. \square

Nun können wir beweisen, dass die Fredholm-Abbildung $\pi_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eigentlich ist. Sei also $[A_i, \Phi_i] \in \mathcal{M}_{\eta_i}$ und es konvergiere die Folge $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$. Nach den Sätzen 3.28 und 3.30 existieren Konstanten $C, \epsilon > 0$ und ein Kompaktum $K' \supset X$, so dass auf $X^+ \setminus K'$

$$(1 - |\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2)^2 + |\beta_i|^2 + |\nabla_{a_i} \alpha_i|^2 + |\tilde{\nabla}_{a_i} \beta_i|^2 \leq C e^{-\epsilon t} \quad (3.62)$$

gilt. Wir werden mit den beiden folgenden Lemmata sehen, dass ausserhalb eines größeren Kompaktums $K_1 \supset K'$ und innerhalb eines Kompaktums $K_2 \supset K_1$ die Folge $([A_i, \Phi_i])_i$ eine konvergente Teilfolge besitzt, welche wir zu einer global konvergierenden Folge zusammensetzen werden.

Lemma 3.34 *Es existiert ein Kompaktum $K_1 \supseteq K'$ und Eichtransformationen $u_i \in \mathcal{G}$, so dass eine Teilfolge der transformierten Lösungen $(A_i, \Phi_i) \cdot u_i$ auf $X^+ \setminus K_1$ (stark) in der L^2 -Topologie konvergieren.*

Beweis: Wir schreiben nach der bereits getroffenen Konvention $(A_i, \Phi_i) = (a_i, \alpha_i, \beta_i)$. Nach Anwendung von Eichtransformationen von u_i auf (A_i, Φ_i) bekommen wir mit Korollar 3.29, dass zusätzlich zu (3.62) alle a_i exponentielles Abfallverhalten haben. Ebenso schreibt uns diese Korollar vor, wie wir K_1 zu wählen haben; wir müssen K_1 so wählen, dass alle α_i ausserhalb von K_1 ungleich 0 sind, was wegen dem gleichmäßigen exponentiellen Abfallverhalten aus (3.62) möglich ist. Da die Konstanten für dieses exponentielle Abfallverhalten aus dem Beweis von Korollar 3.29 bis auf einen konstanten Faktor dieselben wie für (α_i, β_i) aus Satz 3.28 sind, können wir oBdA. wegen den Sätzen 3.28 und 3.30 dieselben Konstanten $\epsilon, C > 0$ wie in (3.62) annehmen, so dass

$$|a_i|^2 \leq C e^{-\epsilon t} \quad (3.63)$$

unabhängig von i gilt. Da $\Phi_i = (\alpha_i, \beta_i)$ die elliptische Differentiengleichung (3.7) erfüllt, also $D_{A_i} \Phi_i = 0$ erfüllt, sind wegen lokaler elliptischer Regularitätstheorie α_i und β_i glatt und für jedes $k > 0$ gibt es Konstanten $C, \epsilon > 0$ so dass

$$|\nabla_{a_i}^k \alpha_i|^2 + |\tilde{\nabla}_{a_i}^k \beta_i|^2 \leq C e^{-\epsilon t}$$

auf $X^+ \setminus K_1$ gilt. Wiederum wegen der Relation zwischen dem umgekehrten a_i und (α_i, β_i) aus Korollar 3.29 gilt nun insgesamt, dass alle a_i, α_i und β_i

gleichmäßig exponentielles Abfallverhalten in allen (∇_{A^-}) -Ableitungen haben; diese Konstanten sind nur gleichmäßig für alle Folgenglieder *einer Ableitung*, jedoch nicht notwendigerweise für alle unendlich vielen Ableitungen gleichzeitig, wiederum jedoch für die ersten l Ableitungen. Nach einem Diagonalargument existiert nun eine Teilfolge der (A_i, Φ_i) (also oBdA. die alte Folge), so dass diese Folge auf jedem Kompaktum $K^+ \subset X^+ \setminus K_1$ insbesondere in der L_l^2 -Norm eine Cauchyfolge ist und somit konvergiert. Wegen dem exponentiellen Abfallverhalten in den ersten l Ableitungen ist eine solche Folge auf ganz $X^+ \setminus K_1$ eine $L_{l,A}^2$ -Cauchyfolge und konvergiert daher wegen der Vollständigkeit von $L_{l,A}^2$. \square

Lemma 3.35 *Für eine beliebige kompakte Untermannigfaltigkeit $K_2 \subset X^+$ mit Rand existieren Eichtransformationen $v_i \in L_{l+1}^2(K_2)$ derart, dass wenn man zu einer Teilfolge von $(A_i, \Phi_i)_i$ übergeht (und oBdA. die alte behält), die Folge $(A_i, \Phi_i) \cdot v_i$ (stark) in der L_l^2 -Topologie konvergiert.*

Beweis: Für den geschlossenen Fall wird dies in [34, §5.3] gezeigt. Schwächt man die Geschlossenheit zu 'kompakt mit Rand' ab, muss man zusätzlich die gleichmäßige Beschränktheit der Φ_i verwenden, damit der Beweis analog durchgeht (vgl. [26]). \square

Beweisabschluss von Theorem 3.20: Wir wählen $K_1 \subset K_2$ und Eichtransformationen u_i auf K_1 und v_i auf K_2 sowie eine gemeinsame Teilfolge, wie in den beiden Lemmata 3.34 und 3.35, so dass die Konvergenzaussagen beider Lemmata simultan gelten. Nach einem eventuellen weiteren Übergang zu einer Teilfolge konvergiert die Folge $w_i = u_i v_i^{-1}$ in der L_{l+1}^2 Topologie gegen ein w auf $K_2 \setminus K_1$, wir erinnern uns dabei, dass \mathcal{G} nach Satz 3.3 eine unendlich-dimensionale Hilbert-Gruppe ist. Wir wählen ein $N \gg 0$, so dass $|w_i - w_N| < \frac{1}{2}$ für $i \geq N$ ist. Setze nun $u'_i = u_i u_N^{-1}$ und $v'_i = v_i v_N^{-1}$. Für $i \geq N$ gibt es nun eine eindeutige S^1 -wertige Funktion θ_i auf $K_2 \setminus K_1$, die in L_{l+1}^2 liegt, mit $|\theta_i| < 1$, so dass $w_i = w_N \exp(2\pi i \theta_i)$ auf $K_2 \setminus K_1$ gilt. Nun setzen wir

$$s_i = \begin{cases} v'_i \exp(2\pi i \gamma \theta_i) = v_i v_N^{-1} (w_i w_N)^\gamma & \text{auf } K_2 \\ u'_i & \text{auf } X^+ \setminus K_2 \end{cases}$$

wobei γ eine glatte Funktion, die auf K_1 gleich 0 und auf $X^+ \setminus K_2$ gleich 1 ist. Nun konvergiert die Folge $(A_i, \Phi_i) \cdot s_i$ mit den Eichtransformationen $s_i \in \mathcal{G}$ in der L_l^2 -Topologie auf $K_1 \cup (X^+ \setminus K_2)$ aufgrund der Lemmata 3.34 und 3.35 und da \mathcal{G} eine kommutative Gruppe ist, die glatt und insbesondere stetig auf \mathcal{C} operiert. Zuletzt müssen wir uns um die Konvergenz auf $K_2 \setminus K_1$ kümmern. Dort schreiben wir für die nach Lemma 3.34 L_l^2 -konvergente Folge $(A_i, \Phi_i) \cdot v_i v_N =: T_i$ und für die $(w_i w_N)^\gamma =: c_i$. Die Folge $(c_i)_i$ ist L_{l+1}^2 -konvergent,

da dies für die Folge $(w_i)_i$ zutrifft und $x \rightarrow x^\gamma$ eine glatte Operation auf \mathcal{G} ist (γ hat kompakten Träger). Wir rechnen für i, j

$$T_i c_i - T_j c_j = T_i(c_i - c_j) + (T_i - T_j)c_j$$

aus und sehen nun, dass die Folge $T_i c_i$ eine L^2_t -Cauchyfolge auf $K_2 \setminus K_1$ und somit L^2_t -konvergent ist. Dies schliesst den Beweis ab. \square

3.4.3.3 Exponentielles Abfallverhaltens bei endlicher Energie

Wir hatten der Übersichtlichkeit halber den Beweis von Satz 3.28, der das exponentielle Abfallverhalten von Lösungen der SW-Gleichungen mit endlicher Energie auf dem Kegelige X^+ behauptet, übersprungen. Dieser Unterabschnitt ist dem Beweis dieser Aussage gewidmet, wobei wir auf eine fundamentale lokale Rechnung auf Bällen im \mathbb{R}^4 aus [25], die wiederum punktweise Differentialungleichungen aus [43] verwendet, zurückgreifen werden. Letzere erwähnte Aussage im \mathbb{R}^4 setzt allerdings voraus, dass $|\alpha|^2 \geq 1/2$ gilt. Wir werden dies für hinreichend große t -Koordinate auf dem Kegelige erreichen können. Grundlage dafür ist das folgende Lemma im \mathbb{R}^4 , was wegen der approximativen Flachheit von X^+ auch dort angewendet werden kann.

Lemma 3.36 *Sei (a, α, β) eine Lösung der SW-Gleichungen (3.41) und (3.43) für die Standard symplektische Form auf dem \mathbb{R}^4 und $\eta = 0$. Sei zusätzlich die Energie $E_{\mathbb{R}^4}(a, \alpha, \beta)$ endlich, dann gilt $|\alpha| \equiv 1$ und $\beta \equiv 0$.*

Beweis: Zuerst machen wir uns klar, dass die Voraussetzung der endlichen Energie zur Folge hat, dass sowohl $|\beta|(x)$ als auch $1 - |\alpha|(x)$ gegen 0 konvergieren, wenn $|x|$ gegen Unendlich strebt. Wir zeigen dies zuerst für β und wenden das selbe Argument auf α an. Sei daher $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^4$ eine Folge von divergierenden Punkten und $\kappa > 0$, so dass $|\beta|(x_i) \geq \kappa$ für alle x_i . Wir betrachten die Folge $\beta_i := \beta|_{B_1(x_i)}$, die β auf die Einheitsbälle $B_1(x_i)$ einschränkt. Wegen der Voraussetzung, dass die Energie $E_{\mathbb{R}^4}(a, \alpha, \beta)$ endlich ist (siehe Definition 3.11), folgt, dass die Folge $(\beta_i)_i$ im Raum $L^2_{1,a}(B_1(0))$ beschränkt ist und somit nach Anwendung der kompakten Rellich-Kondrakov-Einbettung $L^2_1 \rightarrow L^2$ oBdA. in $L^2(B_1(0))$ konvergiert. Sei $\tilde{\beta}$ dieser Grenzwert, der nach Konstruktion $|\tilde{\beta}|(0) \geq \kappa$ und somit $E_{B_1(0)}(a, \alpha, \tilde{\beta}) > C$ für ein $C > 0$ unabhängig von a und α erfüllt. Diese L^2 -Konvergenz gegen $\tilde{\beta}$ und die Energieabschätzung $E_{B_1(0)} > C$ von $\tilde{\beta}$ implizieren dann aber, dass für die betrachtete Lösung $E_U(a, \alpha, \beta) = \infty$ gilt, wobei U die Vereinigung über alle Bälle $B_i(x_i)$ ist. Dies zeigt die Konvergenz der $|\beta|(x_i)$. Ein vollkommen analoges Argument zeigt dies auch für $1 - |\alpha|$.

Auf dem flachen \mathbb{R}^4 mit $\eta = 0$ gilt wegen den Seiberg-Witten-Gleichungen (3.41), (3.41) und Lemma 3.33 die punktweise Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\beta|^2 &= d^*d|\beta|^2 \\
&= \underbrace{\langle \tilde{\nabla}_a^* \tilde{\nabla}_a \beta, \beta \rangle - \langle \tilde{\nabla}_a \beta, \tilde{\nabla}_a \beta \rangle}_{\tilde{\nabla}_a \text{ ist ein unitärer Zusammenhang}} \\
&= \underbrace{2\langle \bar{\partial}_a^* \bar{\partial}_a \beta, \beta \rangle - 2iF_a^\omega |\beta|^2}_{\text{Lemma 3.33}} - |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 \\
&= \underbrace{-\frac{1}{4}(1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2)|\beta|^2}_{(3.43)} - \underbrace{2\langle \bar{\partial}_a \bar{\partial}_a \alpha, \beta \rangle}_{(3.41)} - |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 \\
&= -\frac{1}{4}(1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2)|\beta|^2 \quad - \underbrace{\frac{1}{2}|\alpha|^2|\beta|^2}_{(3.43) \text{ und } \mathbb{R}^4 \text{ trägt komplexe Struktur}} - |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Da $|\beta|(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert folgt aus dem Minimumsprinzip (oder Maximumsprinzip, je nach Sichtweise), dass $|\beta|$ und somit β konstant gleich 0 sein muss.

Nun werden wir zeigen, dass $|\alpha| \equiv 1$ gilt. Die Seiberg-Witten-Gleichung (3.41) zusammen mit der soeben gezeigten Identität $\beta \equiv 0$ besagt, dass $F_a^{0,2} \equiv 0$ gilt. Also definiert der Zusammenhang a eine holomorphe Struktur auf dem trivialen Linienbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^4 . Die Seiberg-Witten-Gleichung (3.41), die sich wegen $\beta \equiv 0$ zu $\bar{\partial}_a \alpha = 0$ reduziert, sagt dann sogar aus, dass α ein holomorpher Schnitt in diesem trivialen Linienbündel ist. Wir haben oben gezeigt, dass es eine Konstante $C > 0$ geben muss, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^4 \setminus B_C(0)$ gilt, dass $|\alpha(x)| \neq 0$ gelten muss, denn andernfalls gäbe es eine Folge von x_i die gegen Unendlich strebt und für die $|1 - \alpha(x_i)|$ nicht gegen 0 streben würde, was einen Widerspruch zu der vorangegangenen Betrachtung darstellt. Angenommen es gibt noch Punkte $x \in \mathbb{R}^4$ für die $\alpha(x) = 0$ wäre und somit in $B_C(0)$ liegen müssen, dann wäre $1/(\alpha)$ bis auf das beschränkte Gebiet $B_C(0)$ ein holomorpher Schnitt, was im Widerspruch zu Hartog's Theorem steht (siehe [35]). Man beachte, dass das Vorhandensein von mehr als einer komplexen Variable in \mathbb{R}^4 ganz wesentlich ist, denn Hartog's Theorem gilt nicht in der komplexen Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, wie das Beispiel $\alpha = 1/z$ belegt.

Also können wir ohne Probleme eine Funktion h auf \mathbb{R}^4 finden, die $|\alpha|^2 = e^h$ erfüllt. Da \mathbb{R}^4 eine komplexe Struktur trägt und a eine holomorphe Struktur

definiert, gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta h(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2) &= -\Lambda\partial\bar{\partial}\log|\alpha|^2 \\ &= -i\Lambda F_a \\ &= -2iF_a^\omega. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun noch die SW-Gleichung (3.43), erhalten wir

$$2\Delta h + e^h - 1 = 2\Delta h + (h^{-1}(e^h - 1))h = 0.$$

Es ist klar, dass $h^{-1}(e^h - 1) \geq 0$ ist, wir also das Minimumsprinzip anwenden können, um $h \equiv 0$ zu erhalten — $h = \log|\alpha|^2$ geht im Unendlichen gegen 0, da α im Unendlichen gegen 1 strebt. Daraus folgt dann $|\alpha| \equiv 1$. \square .

Um eine verallgemeinerte analoge Aussage auf X^+ zu bekommen, führen wir folgende Funktion ein. Sei $\sigma : X^+ \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Funktion, die $\sigma(z) \leq \text{inj}(z)$ erfüllt und für $t \rightarrow \infty$ gegen Unendlich geht. Außerdem sei σ auf $\{t\} \times \partial X$ für jedes $t > 1$ konstant. Diese Funktion existiert wegen Definition 3.2 (und der Kompaktheit von ∂X). Die approximative Flachheit auf dem Kegelende lässt uns aus dem vorherigen Lemma folgende Aussage schließen:

Lemma 3.37 *Es gibt ein $t_0 > 1$, das nur von der zulässigen Struktur (X^+, g, ω) , $\|\eta\|_{\mathcal{N}}$ und E_0 abhängt, so dass für jede Lösung (a, α, β) der Seiberg-Witten-Gleichungen (3.41) und (3.43) mit $E_{X^+ \setminus X}(a, \alpha, \beta) \leq E_0$ die Ungleichung*

$$|\alpha|^2(z) \geq 1/2$$

für alle $z \in X^+ \setminus X$, deren t -Koordinate $t(z)$ die Bedingung $t(z) \geq t_0$ erfüllt, gilt.

Beweis: Wir nehmen nun an, dass die Behauptung falsch sei. Demnach existiert eine Folge von $\eta_i \in \mathcal{N}$ mit beschränkter $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ -Norm und Lösungen (a_i, α_i, β_i) der Seiberg-Witten-Gleichungen respektive der Perturbation η_i auf dem Kegelende $X^+ \setminus X$ mit $E_{X^+ \setminus X}(a_i, \alpha_i, \beta_i) \leq E_0$ und Punkte z_i für die $t(z_i)$ gegen Unendlich geht, wenn $t \rightarrow \infty$ und welche $|\alpha|^2(z_i) \leq 1/2$ erfüllen. Da für eine zulässige Struktur (X^+, g, ω) die Metrik g und die symplektische Struktur ω eingeschränkt auf die Bälle $B_{\sigma(z_i)}(z_i)$ für wachsendes i die Standard-Metrik und die Standard symplektische Struktur auf dem \mathbb{R}^4 approximieren, erhalten wir eine Folge von Konfigurationen auf Bällen $B_{\sigma(z_i)}(0) \subset \mathbb{R}^4$, die auf kompakten Mengen gegen eine Konfiguration (a, α, β) des \mathbb{R}^4 konvergieren, die die Seiberg-Witten-Gleichungen für $\eta = 0$ erfüllen, denn zusätzlich war $\|\eta_i\|_{\mathcal{N}}$ als beschränkt vorausgesetzt. Die Energie der Grenzwert-Lösung auf dem \mathbb{R}^4 ist nach Konstruktion durch E_0 beschränkt. Ebenso ist für die Grenzwert-Lösung im \mathbb{R}^4 nach Konstruktion

$|\alpha(0)|^2 \leq 1/2$, was Lemma 3.36 widerspricht. Somit war unsere ursprüngliche Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. \square

Wie eingangs angedeutet, benutzen wir für den Beweis von Satz 3.28 eine lokale Rechnung auf Bällen des \mathbb{R}^4 :

Proposition 3.38 *Es gibt Konstanten $K, v > 0$ und eine Umgebung \mathcal{U} der Standard-Metrik und der Standard symplektischen Form auf dem Ball $B_1 \subset \mathbb{R}^4$ aufgefasst in der Topologie der glatten Schnitte mit den folgenden Eigenschaften: Sei $\sigma \geq 1$ und sei eine Metrik g und eine symplektische Form ω auf $B_\sigma(0) \subset \mathbb{R}^4$ gegeben, so dass die euklidischen Koordinaten des \mathbb{R}^4 Gauss'sche Normalkoordinaten bezüglich g sind. Weiterhin gelte, dass die reskalierte Form $((S_\sigma^*g)/\sigma^2), (S_\sigma^*\omega)/\sigma^2$) auf dem Einheitsball $B_1(0)$ in der Umgebung \mathcal{U} der Standard-Struktur liegt (Es sei $S_\sigma : B_1 \rightarrow B_\sigma$ die zentrische Streckung). Sei nun (a, α, β) eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichungen (3.41) und (3.43) auf $B_\sigma(0)$ bezüglich den Daten (g, ω) und eine Störung η , so dass $|\alpha|^2 > 1$ gilt. Dann sind auf $B_{\sigma/2}(0)$ die Ausdrücke $|1 - |\alpha|^2|$, $|\beta|^2$, $|\nabla_a \alpha|^2$ und $|\tilde{\nabla}_a \beta|^2$ durch*

$$\|\eta\|_{C^l(B_\sigma(0))} K e^{-v\sigma}$$

beschränkt.

Beweis: Dies findet man als Proposition 3.22 ausführlich in [25] bewiesen. Die dafür wesentlichen Zutaten sind punktweise Abschätzungen und Differential-Ungleichungen die aus [43] stammen. \square

Beweis von Satz 3.28: Lemma 3.37 erlaubt es uns, Proposition 3.38 für hinreichend großes t (dessen untere Schranke nur von der zulässigen Struktur abhängt) anzuwenden, in dem wir für $t(z) \gg 1$ die Bälle $B_{\sigma(z)}(z) \subset X^+ \setminus X$ in den \mathbb{R}^4 isometrisch durch gleichzeitigen Pullback von g und ω einbetten. Die Aussage dieser Proposition ist dann genau die Behauptung aus Satz 3.28. \square

3.4.4 Definition der Invariante

Wir werden die in [25] angeregte Konstruktion der Seiberg-Witten-Invariante in diesem Abschnitt rekapitulieren. Im weiteren Ablauf dieser Arbeit brauchen wir diese nicht. Wir wollen dennoch der Vollständigkeit halber kurz die Konstruktion erklären.

Zuerst brauchen wir folgendes fundamentales Ergebnis.

Theorem 3.39 *Für eigentliche Fredholm-Abbildungen $F : V \rightarrow W$ zwischen orientierbaren Banachmannigfaltigkeiten V und W vom Index 0 kann man einen Abbildungsgrad $\deg(F)$ definieren. Dieser Abbildungsgrad ist analog zum endlich dimensionalen Fall für reguläre (nach Smale-Sard somit für eine Baire Menge von) Werte $w \in W$ gleich der Anzahl der Punkte in $F^{-1}(w)$ mit Vorzeichen gezählt und hängt nicht von der Auswahl des regulären Wertes $w \in W$ ab.*

Beweis: Dies wird in [15], [16], [17], [38], [14] besprochen, dabei geht ganz wesentlich ein, dass die Fredholm-Abbildung eigentlich ist und vom Index 0 ist. \square

Nun wollen wir unsere Situation auf dieses Theorem zurückführen und die Seiberg-Witten-Invariante als Abbildungsgrad von $D\pi_2$ definieren. Wir greifen auf [25, Appendix] zurück um die Orientierbarkeit von $\mathcal{M}(\tilde{P})$ zu bekommen, was nun folgende Definition rechtfertigt.

Definition 3.12 Falls die formale Dimension $d(\tilde{P})$ des SW-Modulraums ungleich 0 ist, definieren wir die Seiberg-Witten-Invariante $\text{SW}(\tilde{P}) := 0$, im Fall $d(\tilde{P}) = 0$ definieren wir sie durch

$$\text{SW}(\tilde{P}) := \deg(D\pi_2).$$

Bemerkung 3.40 Es ist zu anzumerken, dass die so definierte SW-Invariante nicht von der speziellen Wahl der zulässigen Struktur (X^+, g, ω) abhängt (siehe [25, §3.(iv)]). Da wir die SW-Invariante, wie bereits erwähnt, an sich nicht brauchen, lassen wir den Beweis an dieser Stelle weg.

Im geschlossenen Fall (vgl. §2.1.5) war die SW-Invariante auch im Fall, dass der Modulraum nicht nulldimensional ist, nicht konstant 0 definiert. Das Integral, das dort zur Definition verwendet wurde, ist in unserem Fall jedoch immer 0 (vgl. [25]).

3.4.5 Stabilität des Modulraums

Wir möchten für den Beweis der Endlichkeitsaussage im nächsten Kapitel folgende wichtige Aussage festhalten, die die generische Nichtleerheit des Modulraums im Fall einer globalen symplektischen Struktur beinhaltet:

Theorem 3.41 Sei (X^+, g, ω) eine zulässige Struktur auf X^+ . Angenommen es existiert für ein Kompaktum $K' \supset X$ eine Fortsetzung ω von $\omega|_{X^+ \setminus K'}$ als selbstduale symplektische Form der Länge $\sqrt{2}$ auf ganz X^+ und sei $\tilde{P}'_0 \in \text{Spin}^c(X, \xi)$ die kanonische Spin^c -Struktur zu ω im Sinne von Proposition 2.12. Dann ist der Modulraum $\mathcal{M}(\tilde{P}'_0)_\eta$ nach einer Reskalierung der Metrik um eine Konstante für eine Baire-Menge von $\eta \in \mathcal{N}$ nicht leer.

Beweis: Per Definition der SW-Gleichungen (3.6) und (3.7) ist der unperturbierte Modulraum \mathcal{M}_0 nicht leer, da er die kanonische Lösung $[A_0, \Phi_0]$ enthält. Wir zeigen nun, dass dies die einzige Lösung in \mathcal{M}_0 ist. Skaliert man die Metrik mit einem noch nicht fixierten $r \geq 1$ wird aus der Krümmungsgleichung (3.43) global

$$\begin{aligned} 2iF_a^\omega - \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2) &= \eta_0 \\ 2F_a^{0,2} - \frac{r}{2}\bar{\alpha}\beta &= \eta_1. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Identität, die in Lemma 3.31 bewiesen wird, geht dann vollkommen analog zu

$$\begin{aligned} &\int_{X^+} \left(|\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial} \beta|^2 + 4|iF_a^\omega - \frac{r}{8}(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)|^2 + 4|F^{0,2} - \frac{r}{4}\bar{\alpha}\beta|^2 \right. \\ &\quad \left. + riF_a^\omega - 4|iF_a^\omega|^2 - 4|F_a^{0,2}|^2 \right) \\ &= \int_{X^+} \left(\frac{1}{2}(|\nabla_a \alpha|^2 + |\tilde{\nabla}_a \beta|^2 + 2\langle iF_{\tilde{\nabla}}^\omega \beta, \beta \rangle) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{16}(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \frac{r^2}{4}|\beta|^2 - 2\langle N \circ \partial_a \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{R}} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

über, wobei wir wieder annehmen, dass $a = A - A_0$ und $\Phi - \Phi_0$ mit seinen ersten Ableitungen $\nabla_a \alpha$ und $\tilde{\nabla}_a \beta$ entlang dem Kegelende exponentielles Abfallverhalten hat. Wählt man nun $r \geq 1$ so groß, dass $|N| \leq r/32$ und $F_{\tilde{\nabla}}^\omega \leq r/8$ auf ganz X^+ gilt, erhält man analog wie im Beweis von Satz 3.30, dass die rechte Seite obiger Gleichung eine obere Schranke für

$$\int_{X^+} \left(\frac{1}{4}|\nabla_a \alpha|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{\nabla}_a \beta|^2 + \frac{r^2}{32}(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \frac{r^2}{16}|\beta|^2 \right)$$

ist. Sei nun $[A, \Phi] \in \mathcal{M}_0$ eine beliebige Lösung. Nach Korollar 3.29 wissen wir, dass diese Lösung Eich-Repräsentanten hat, die den Voraussetzungen von Lemma 3.31 bzw. Satz 3.30 im Sinne des exponentiellen Abfallverhaltens entlang dem Kegelende genügen. Da diese Lösung der SW-Krümmungsgleichung (3.64) und der Dirac-Gleichung $\bar{\partial}_a \alpha + \bar{\partial}_a^* \beta = 0$ sind, folgt mit obiger Betrachtung die Ungleichung

$$\int_{X^+} \frac{r}{2}iF_a^\omega \geq \int_{X^+} \left(\frac{1}{4}|\nabla_a \alpha|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{\nabla}_a \beta|^2 + \frac{r^2}{32}(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + \frac{r^2}{16}|\beta|^2 \right).$$

Die linke Seite berechnet bis auf eine Konstante $C > 0$ den Ausdruck

$$\int_{X^+} i\omega \wedge da,$$

der wegen dem exponentiellen Abfallverhalten von a und partieller Integration analog zum Beweis von Satz 3.30 gleich Null ist. Wir merken an, dass an dieser Stelle die Geschlossenheit von ω noch einmal wesentlich eingeht. Dies impliziert also, dass bis auf Eichung $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ und somit das Paar (α, β) gleich dem kanonischen Spinor ist. Da es zum kanonischen Spinor genau einen $Spin^c$ -Zusammenhang gibt, der die Dirac-Gleichung erfüllt, folgt die Behauptung, dass es in \mathcal{M}_0 genau eine Lösung gibt.

Wir wissen nach Theorem 3.20, dass für ein generisches $\eta \in \mathcal{N}$ der Modulraum \mathcal{M}_η eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist, also aus endlich vielen Punkten besteht. Wir zeigen nun, dass \mathcal{M}_η unter den gegebenen Voraussetzungen nicht leer sein kann. Um dies zu erreichen, werden wir die Existenz eines Cobordismus zwischen dem einpunktigen Modulraum \mathcal{M}_0 und \mathcal{M}_η nachweisen.

Sei \mathcal{P} der Raum der L_1^2 Abbildungen

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$$

mit $h(0) = 0$ und $h(1) = \eta$. Nach dem Sobolev-Einbettungs-Theorem (für 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten) sind solche Pfade stetig. \mathcal{P} ist eine Hilbert-Mannigfaltigkeit dessen Tangentialraum aus allen L_1^2 Pfaden $[0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$ besteht, die an den Endpunkten verschwinden. Wir erweitern das Seiberg-Witten-Funktional um den Parameter \mathcal{P} , in dem wir es als die Abbildung

$$\mathbf{F} : \mathcal{C} \times [0, 1] \times \mathcal{P} \rightarrow L_{l-1}^2(i\Lambda^{2,+}T^*X^+) \oplus L_{l-1,A}^2(W^-),$$

die durch

$$\mathbf{F}(A, \Phi, t, h) = \left(F_A^+ - \{\Phi \otimes \Phi^*\} - (F_{A_0}^+ - \{\Phi_0 \otimes \Phi_0^*\}) - h(t), D_A \Phi \right)$$

gegeben ist, definieren.

Wir behaupten analog zum absoluten Fall, dass das Differential $D\mathbf{F}$ an jeder Nullstelle/Lösung (A, Φ, t, h) surjektiv ist. Dasselbe Transversalitätsargument wie im absoluten Fall (siehe Beweis von Satz 3.25) sagt uns, dass dies für alle Nullstellen (A, Φ, t, h) von \mathbf{F} mit $0 < t < 1$ der Fall ist, denn der Tangentialraum von \mathcal{P} besteht aus allen Pfaden, die nur an den Endpunkten verschwinden. Für Lösungen mit $t = 1$ ist das Differential automatisch durch die Generizität von η surjektiv und für Lösungen mit $t = 0$ kann man dies nach einer evtl. konstanten Reskalierung der Metrik aus Lemma 3.18 ablesen, was für diesen Fall besagt, dass die Linearisierung der SW-Gleichungen trivial ist. Sei \mathbf{M} der Raum der Lösungen/Nullstellen von \mathbf{F} modulo den

L^2_{l+1} -Eicentransformationen \mathcal{G} , oder anders gesagt, der Modulraum parametrisiert nach \mathcal{P} . Dieser Modulraum \mathbf{M} ist wegen der Surjektivität von \mathbf{F} an den Nullstellen eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir betrachten die Projektion

$$\pi_3 : \mathbf{M} \rightarrow \mathcal{P}.$$

Diese ist aufgrund der Konstruktion von \mathbf{F} , der Kompaktheit des Einheitsintervalls $[0, 1]$ und der Eigentlichkeit von π_2 (siehe Theorem 3.20) eine eigentliche Fredholmabbildung vom Index 0. Dies hat wiederum nach dem Smale-Sard-Theorem zur Folge, dass für einen generischen Pfad $h \in \mathcal{P}$ die Faser \mathcal{M}_h eine glatte, kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Nach Konstruktion sind alle Pfade in \mathcal{P} stetig und somit beschreibt \mathcal{M}_h einen Cobordismus zwischen dem einpunktigen Modulraum \mathcal{M}_0 und dem zu untersuchenden \mathcal{M}_η . Da ein Punkt jedoch nicht zur leeren Menge cobordant sein kann, folgt die Behauptung. \square

Kapitel 4

Die Endlichkeitsaussage

Nachdem wir im vorherigen Kapitel die Seiberg-Witten-Theorie für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten X mit Kontaktrand bzw. der assoziierten Kegellenden-Mannigfaltigkeit X^+ verstanden haben, widmen wir uns der Endlichkeitsaussage, die in der Einführung als Theorem 1.1 formuliert wurde. Wir wiederholen die Aussage an dieser Stelle noch einmal.

Theorem 4.1 *Sei Y eine orientierte, geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nur endlich viele Homotopieklassen von 2-Ebenen-Feldern $\xi \rightarrow Y$, die als symplektische semi-füllbare Kontaktstruktur realisiert werden können (vgl. Definition 1.4).*

Wir bemerken, dass man nicht Homotopie-Klassen von Kontaktstrukturen, sondern die schwächere bzw. gröbere Homotopie-Klassifikation von 2-Ebenen-Feldern verwenden muss, um dieses Resultat zu erhalten.

Wir haben im letzten Abschnitt des vorangegangenen Kapitels gesehen, dass im Falle der Fortsetzbarkeit der symplektischen Struktur ω auf dem Kegellende auf ganz X^+ , der SW-Modulraum \mathcal{M}_η für generische $\eta \in \mathcal{N}$ nicht leer ist. Der erste Abschnitt in diesem Kapitel wird den symplektisch füllbaren Fall auf diesen zurückführen. Nach dem das erreicht ist, werden wir uns im nächsten Kapitel um die Homotopieklassifikation von 2-Ebenen-Feldern kümmern und die geeigneten Begrifflichkeiten einführen. Proposition 2.14 besagt bereits grob, dass diese Klassifikation durch $Spin^c$ -Strukturen auf Y 'mal' nicht verschwindende Schnitt modulo Homotopie in $W \rightarrow Y$ und Multiplikation mit S^1 -wertigen Schnitten gegeben ist. Da es zu einer $Spin^c$ -Struktur unendlich viele nicht zueinander homotope, nichtverschwindende Schnitte geben kann, werden wir dieses genauer beleuchten müssen. Wir werden daher zeigen, dass diese Homotopieklassifikation bei fixierter $Spin^c$ -Struktur durch die Gruppe \mathbb{Z} oder \mathbb{Z}_k für geeignetes k gegeben ist, dieses

k ist dabei eine Teilbarkeitskonstante, die die Homotopie von nicht verschwindenden Schnitten im Spinorbündel W modulo Isomorphie ausdrückt. Dies führt zu einem weiteren wichtigen Werkzeug, einer Differenzenfunktion $\bar{\delta}$ auf Homotopieklassen von 2-Ebenen-Feldern (derselben $Spin^c$ -Struktur) mit Werten in \mathbb{Z} bzw. \mathbb{Z}_k .

Daraufhin wird der nächste Abschnitt die SW-Gleichungen auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times Y$ mit dem Chern-Simons-Dirac-Funktional CSD in Verbindung bringen, in dem wir zeigen, dass Lösungen der SW-Gleichungen auf dem Zylinder dem negativen Gradientenfluss von CSD entsprechen. Ebenfalls werden dreidimensionale Seiberg-Witten-Gleichungen und ihre Lösungen auf Y eine Rolle spielen und wir werden dann sehen, dass diese Lösungen kritische Punkte des CSD-Funktional sind. Dies zusammen führt zur geeigneten Randbedingung auf Mannigfaltigkeiten mit Zylinderenden, indem man fordert, dass diese Lösungen im Unendlichen gegen eine Lösung der 3-dimensionalen Gleichungen konvergieren müssen.

Der Beweis der Endlichkeitsaussage wird die Kegelendtheorie aus dem vorherigen Kapitel mit der Zylinderenden-Theorie kombinieren, indem man zwischen dem kompakten Teil und dem Kegelende immer größer werdende Zylinder einspannt und somit Lösungen auf dem Zylinderende mit Lösungen auf dem Kegelende vergleichen kann. Daraus können wir schließen, dass aus symplektischer Füllbarkeit einer Kontaktstruktur (unter einer gewissen Nebenbedingung) folgt, dass diese von einer $Spin^c$ -Struktur induziert wird, welche einen nicht leeren SW-Modulraum assoziiert hat. Analog zum geschlossenen 4-dimensionalen Fall, kommen hierfür nur endlich viele $Spin^c$ -Strukturen in Frage. Dies erledigt grob gesprochen den Fall, dass die Teilbarkeitskonstante k ungleich 0 ist. Falls $k = 0$ ist, werden wir zusätzlich bezüglich der Differenzenfunktion $\bar{\delta}$ obere und untere Schranken angeben. Zum Schluss zeigen wir, wie über Verklebung mit einer 'Modellmannigfaltigkeit' die Endlichkeitsaussage für symplektische Semi-Füllbarkeit folgt.

4.1 Kompatibilität mit dem Kegelende von X^+

Als erstes erklären wir, wie wir von der symplektischer Füllung zu einer Situation kommen, die uns das Theorem 3.41, das die generische Nichtleerheit des SW-Modulraums besagt, anwenden lässt.

Angenommen (X, ω) sei eine symplektische Füllung von $(\partial X, \xi)$ (wobei ξ eine kompatible Kontaktstruktur sei), dann muss ω nicht unbedingt mit ω_0 aus (3.1), das auf dem Kegelende $[1, \infty) \times \partial X$ lebt, auf $\{1\} \times \partial X$ übereinstimmen ($\omega|_{\partial X}$ muss nicht einmal exakt sein, so wie es ω_0 ist). Nach Stören von ω_0 und der Kegelmetrik g_0 ohne die Klasse der zulässigen Strukturen auf X^+ zu verlassen, können wir die symplektische Form ω aus der Füllung und das gestörte ω_0 zu einer globalen symplektischen Form verbinden:

Satz 4.2 Sei (X, ω) eine symplektische Füllung von $(\partial X, \xi)$ und sei das Kegelende (X^+, ω_0, g_0) wie in §3.1 definiert. Dann existiert eine globale symplektische Struktur ω_1 und eine Metrik g_1 , so dass ω_1 bezüglich g_1 selbstdual der konstanten Länge $\sqrt{2}$ ist und (X^+, g_1, ω_1) eine globale zulässige Struktur (vgl. Definition 3.2) ist.

Beweis: Es sei $U_1 \subset X$ eine Kragenumgebung von ∂X , die wir mit $[0, 1] \times \partial X$ identifizieren. Wir bezeichnen die erste Koordinate mit s und arrangieren die Situation so, dass $\partial X = s^{-1}(1)$ gilt.

Sei θ eine 1-Form auf ∂X , deren Kern wie in Definition 1.4 bzw. Proposition 2.14 gleich ξ ist. Wir setzen θ kanonisch auf $U_1 = [0, 1] \times \partial X$ fort, indem $\theta|_{\{s\} \times \partial X} = \theta|_{\partial X}$ gefordert wird. Die Kompatibilität zwischen ω und ξ bzw. θ in der Definition 1.4 von symplektischen Füllungen verlangt, dass $\omega|_{\xi} > 0$ ist und dass $\theta \wedge d\theta$ eine Volumenform auf ∂X ist. Also ist die 4-Form $ds \wedge \theta \wedge \omega$ eine positive Volumenform auf ∂X und nach etwaiger Verkleinerung von U_1 zu einem kleineren Kragen eine positive Volumenform auf ganz U_1 .

Sei X° das Innere von X und sei $U_1^\circ = U_1 \cap X^\circ$. Sei $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige glatte, *streng monoton steigende* Funktion, die auf $[0, 1/3)$ konstant gleich 0 ist und

$$\lim_{s \rightarrow 1} f(s) \rightarrow \infty$$

erfüllt. Nun können wir die 1-Form $f(s)\theta$ von U_1° durch 0 auf ganz X° fortsetzen. Wir setzen nun

$$\tilde{\omega} = \omega + d(f\theta)$$

auf X° und erhalten

$$\tilde{\omega}^2 = v_1 f' f + v_2 f' + v_3 f + v_4$$

mit

$$\begin{aligned} v_1 &= 2ds \wedge \theta \wedge d\theta \\ v_2 &= 2ds \wedge \theta \wedge \omega \\ v_3 &= 2d\theta \wedge \omega \\ v_4 &= \omega^2. \end{aligned}$$

Die 4-Formen v_1 und v_2 sind wegen (vgl. oben) Definition 1.4 und Proposition 2.14 strikt positiv. Die 4-Form v_4 ist strikt positiv, da ω symplektisch ist. Da wir erreichen wollen, dass $\tilde{\omega}^2$ strikt positiv und damit symplektisch ist, müssen wir noch den Fall betrachten, dass v_3 keine positive Volumenform ist und diesen Defekt über f kompensieren. Sei hierfür a das Maximum von $|v_3/v_1|$ und sei b das Minimum von $|v_4/v_3|$. Dann wird klar, dass an all den Punkten, an denen $f < b$ oder $f' > a$ gilt, die Form $\tilde{\omega}^2$ strikt positiv ist.

Es ist allerdings kein Problem die Funktion f so zu wählen, dass an den Punkten, wo $f > b$ ist, $f' > a$ gilt. Nach einer solchen Wahl ist $\tilde{\omega}$ eine symplektische Form auf X° .

Sei nun $U_2^\circ \subset U_1^\circ$ die Teilmenge mit $s > 1/3$ und sei $U_3^\circ \subset U_2^\circ$ die Teilmenge auf der $f(s) > 1/2$ gilt. Wir definieren $\psi : X^\circ \rightarrow X^+$ als den Diffeomorphismus, der gleich der Identität auf $X^\circ \setminus U_2^\circ$ ist und den Kragen $U_2^\circ \setminus U_3^\circ$ vermöge

$$(s, x) \rightarrow \left((2f(s))^{1/2}, x \right)$$

auf $[1, \infty) \times \partial X$ abbildet. Per Definition ist der Pull-back $\psi^*(\omega_0)$ gleich $d(f\theta)$ auf U_3° . Wir definieren ω_1 als den Push-forward $\psi_*(\tilde{\omega})$ auf ganz X^+ und erhalten dadurch eine globale symplektische Struktur, die auf $X \setminus U_2^\circ$ gleich ω ist. Auf dem Kegelende gilt dann

$$\omega_1 - \omega_0 = \psi_*(\omega). \quad (4.1)$$

Nach einer Beobachtung vom Gromov (siehe [19]) können wir jetzt eine Metrik g_1 und eine fast komplexe Struktur J_1 finden, so dass

$$\omega_1(\cdot, J_1 \cdot) = g_1(\cdot, \cdot)$$

gilt, diese Metrik erfüllt nach dem Beweis von Proposition 2.12 automatisch, dass ω_1 selbstdual der Länge $\sqrt{2}$ ist. Die Gleichung 4.1 stellt sicher, dass sich die Metriken g_0 und g_1 mit ihren ersten beiden Ableitungen auf dem Kegelende maximal um eine Konstante mal t^{-2} unterscheiden und somit auch die Krümmungen und Injektivitätsradien. Daraus folgt die Zulässigkeit von (X^+, g_1, ω_1) .

Daraus leiten wir das für die Endlichkeitsaussage sehr bedeutende Resultat her, dass der SW-Modulraum generisch nicht leer ist:

Korollar 4.3 *Sei wieder (X, ξ) symplektisch füllbar wie im vorherigen Satz, dann existiert eine globale symplektische Struktur ω' auf X^+ , die nach geeigneter Wahl der Metrik g selbstdual der Länge $\sqrt{2}$ ist und so dass (X^+, g, ω') eine zulässige Struktur ist. Für die von ω' induzierte fast komplexe Struktur J auf X^+ und induzierte Spin^c -Struktur $\tilde{P}'_0 \rightarrow X^+$ und für ein generisches $\eta \in \mathcal{N}$ ist der Modulraum $\mathcal{M}(\tilde{P}'_0)_\eta$ nicht leer.*

Beweis: Satz 4.2, Proposition 2.12 und Proposition 3.41. □

4.2 Homotopieklassifikation von 2-Ebenen-Feldern

In diesem Abschnitt werden wir die bereits angedeutete Homotopieklassifikation von 2-Ebenen-Feldern näher beleuchten und eine Differenzenfunktion auf Homotopieklassen von 2-Ebenen-Felder, die durch dieselbe $Spin^c$ -Struktur induziert werden (vgl. Proposition 2.12), angeben.

Definition 4.1 Sei Y eine geschlossene, orientierte 2-Mannigfaltigkeit. Wir definieren Ξ_Y als die Menge aller Homotopieklassen von orientierten 2-Ebenen-Felder über Y .

Wir möchten die 3-Mannigfaltigkeit Y der Übersichtlichkeit halber fixieren und schreiben daher Ξ anstatt Ξ_Y . Proposition 2.14 induziert eine kanonische Abbildung

$$p : \pi_0(\Xi) \rightarrow Spin^c(Y),$$

deren Faser $p^{-1}(\tilde{Q})$ über einer $Spin^c$ -Struktur $\tilde{Q} \in Spin^c(Y)$ (wir verwenden die Notation \tilde{Q} für eine 3-dimensionale $Spin^c$ -Struktur) mit der Menge aller Homotopieklassen von nicht-verschwindenden Schnitten im (zu \tilde{Q}) assoziierten Spinor-Bündel $W \rightarrow Y$ modulo von Automorphismen von \tilde{Q} (bzw. äquivalent dazu S^1 -wertige Schnitte) induziert wird. Da diese Faser eventuell nicht endlich ist, werden wir nun als technisches Hilfsmittel eine Differenzenfunktion zwischen zwei nicht verschwindenden Schnitten Φ_0 und Φ_1 aus dem Spinorbündel $W \rightarrow Y$ definieren, die die Homotopieklasse von Φ_1 relativ zur Homotopieklasse von Φ_0 bestimmt. Dazu bedarf es einige Vorbereitungen, die im folgenden erläutert werden.

Da für einen Schnitt ψ in einem Bündel E über einer Mannigfaltigkeit, der Ausdruck $\det(d\psi(x))$ an einer Nullstelle x beim Kartenwechsel, wegen $\psi(x) = 0$, seine Determinanten nicht ändert, ist folgende Definition berechnungsfähig:

Definition 4.2 Sei X eine orientierte, kompakte 4-Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand) mit einer $Spin^c$ -Struktur und assoziierten Spinorbündel $W^\pm \rightarrow X$.

Sei $\phi \in C^1(W^+)$ ein Schnitt und $x \in X$ eine Nullstelle von Φ , dann betrachten wir die Determinante von $d\Phi(x) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ an x . Wir nennen Φ generisch, wenn an jeder Nullstelle x die Determinante von $d\Phi(x)$ ungleich 0 ist. Der Index einer Nullstelle eines generischen Schnittes wird als das Vorzeichen der Determinante von $d\Phi(x)$ definiert.

Definition 4.3 Sei X wie in obiger Definition jedoch mit nicht leerem Rand und einem nichtverschwindenden Schnitt $\Phi_0 \in C^\infty(W^+|_{\partial X})$. Der Ausdruck $e(W^+, \Phi_0)$ bezeichne die *relative Eulerklasse* des Bündels W^+ bezüglich dem Schnitt Φ_0 auf dem Rand ∂X .

Bemerkung 4.4 Normalerweise definiert man die Eulerklasse eines orientierten Bündels als Pullback durch den Null-Schnitt der Thom-Klasse (bzw. fundamentale Cohomologiekategorie, siehe [33, §9]), in unserem Fall jedoch bedeutet $e(W^+, \Phi_0) \in H^4(X, \partial X, \mathbb{Z})$ der Pullback Φ_0^*u der Thom-Klasse $u \in H^4(W^+, W^+ \setminus 0; \mathbb{Z})$ unter einer beliebigen generischen Fortsetzung von Φ_0 von ∂X auf ganz X .

Das Ergebnis von $\langle e(W^+, \Phi_0), [X, \partial X] \rangle$ ist daher die Anzahl der mit Vorzeichen gezählten Nullstellen eines generischen Schnittes (siehe unten Def. 4.2) in W^+ , der auf dem Rand gleich Φ_0 ist. Diese Korrespondenz sieht man analog wie im Falle der normalen Eulerklasse auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten, in dem man zeigt, dass die so definierte Euler-Klasse das Poincaré-Dual des generischen Schnittes ist (vgl. [24] und [7, §II.11 u §II.12]).

Nun können wir unsere gesuchte Differenzfunktion definieren.

Definition 4.4 Sei Y eine Kontakt-3-Mannigfaltigkeit und $\tilde{Q} \rightarrow Y$ eine $Spin^c$ -Struktur mit assoziiertem Spinorbündel $W \rightarrow Y$ und sei $W^+ \rightarrow [0, 1] \times Y$ das induzierte Plus-Halbspinorbündel auf $[0, 1] \times Y$ (siehe Beweis von Proposition 2.14). Seien Φ_0 und Φ_1 zwei nicht verschwindende Schnitte im Bündel $W \rightarrow Y$, dann definieren wir die Differenz $\delta_W(\Phi_0, \Phi_1)$ durch

$$\delta(\Phi_0, \Phi_1) = \langle e(W^+; \Phi_0|_{\{0\} \times Y} \cup \Phi_1|_{\{1\} \times Y}), [[0, 1] \times Y, \{0, 1\} \times Y] \rangle.$$

Falls das Spinorbündel klar ist, lassen wir das untengestellte W bei δ weg.

Die Differenz $\delta(\Phi_0, \Phi_1)$ ermittelt also die Homotopieklasse von Φ_1 relativ zur Homotopieklasse von Φ_0 . Wir wollen nun das Verhalten von δ unter Automorphismen, die aus S^1 -wertigen Schnitten bestehen, von \tilde{Q} untersuchen.

Lemma 4.5 Sei die Situation wie in Definition 4.4 und sei $u : Y \rightarrow S^1$ ein Automorphismus von \tilde{Q} . Sei

$$[u] := \frac{-i}{2\pi} u^{-1} du \in H^1(Y),$$

dann gilt

$$\delta(\Phi, u\Phi) = \langle ([u] \smile c_1(W)), [Y] \rangle$$

für einen nicht verschwindenden Schnitt $\Phi \in W$, wobei $c_1(W)$ die erste Chern-Klasse des komplexen Bündels $W \rightarrow Y$ bezeichne.

Beweis: Die erste Behauptung, dass $u^{-1}du$ geschlossen ist, folgt aus

$$d(u^{-1}du) = -u^{-2}du \wedge du + u^{-1}d^2u = 0,$$

die hiermit bewiesen wäre.

Das Bündel $W \rightarrow Y$ zerfällt als Summe zweier komplexer Linienbündel, in das von Φ aufgespannte triviale Linienbündel \mathcal{L}_0 und in ein (evtl. nicht triviales) Linienbündel \mathcal{L}_1 . Es gilt also $W = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$. Wir verkleben die Enden von $[0, 1] \times Y$, so dass wir $\{0\} \times Y$ mit $\{1\} \times Y$ identifizieren, dabei verkleben wir das Bündel $\mathcal{L}_0|_{\{0\} \times Y}$ mit $u \cdot \mathcal{L}_0|_{\{1\} \times Y}$ und $\mathcal{L}_1|_{\{0\} \times Y}$ trivial mit $\mathcal{L}_1|_{\{1\} \times Y}$. Wir bezeichnen die erhaltenen Bündel respektive mit \mathcal{L}'_0 und \mathcal{L}'_1 . Definieren wir nun $W' = \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{L}'_1 \rightarrow S^1 \times Y$ als das dadurch erhaltene komplex 2-dimensionale Bündel, dann gilt

$$\langle c_2(W'), [S^1 \times Y] \rangle = \langle e(W'), [S^1 \times Y] \rangle = \delta(\Phi, u\Phi).$$

Nach dem Produkt-Theorem für die die totale Chern-Klasse (vgl. [33, §14, Eq. (14.7)]) gilt nun

$$e(W') = c_2(W') = c_1(\mathcal{L}'_0) \smile c_1(\mathcal{L}'_1). \quad (4.2)$$

Da wir \mathcal{L}'_1 durch triviales Verkleben erhalten haben, gilt mit der Projektion $\pi : [0, 1] \times Y \rightarrow Y$

$$c_1(\mathcal{L}'_1) = \pi^*c_1(\mathcal{L}_1) = c_1(W), \quad (4.3)$$

wobei die erste Gleichung aus der allgemeinen Chern-Weil-Theorie (man kann für \mathcal{L}'_1 den selben Zusammenhang wie auf $\mathcal{L}_1 \rightarrow [0, 1] \times Y$ verwenden) und die zweite Gleichung wegen der Trivialität des Bündels \mathcal{L}_0 (vgl. [33, §14]) folgt. Wir müssen nun, durch (4.2) motiviert, den Ausdruck $c_1(\mathcal{L}'_0)$ berechnen. Dies werden wir über Chern-Weil-Theorie machen. Es ist klar, dass die äussere Ableitung d^Y auf Y ein Zusammenhang auf dem trivialen Bündel $\mathcal{L}_0|_Y$ ist. Es ist

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)dt + d^Y(u^t(\cdot)) \quad (4.4)$$

ein Zusammenhang auf $\mathcal{L}'_0 \rightarrow S^1 \times Y$ bezüglich der Karte

$$\phi : (0, 1) \times Y \times \mathbb{C} \times (0, 1) \rightarrow \mathcal{L}'_0$$

mit

$$\phi(t, y, z) = (u^t \cdot z \cdot \Phi(y))_{(t,y)},$$

da ∇ mit der Verklebung verträglich ist. Wir rechnen nun lokal auf einer Teilkarte $(0, 1) \times U \subset (0, 1) \times Y$ die Zusammenhangs-1-Form von ∇ aus. Wenn U genügend klein ist können wir auf U die Darstellung $u = e^{i\sigma t}$ verwenden, wobei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Schnitt entsprechender Regularität ist.

Aus der expliziten Formel (4.4) für den Zusammenhang ∇ wird klar, dass die Zusammenhangs-1-Form als $td^Y\sigma$ darstellt werden kann und somit gleich dem kartenunabhängigen Ausdruck $tu^{-1}d^Y u$ ist. Die Krümmung F von ∇ erfüllt dann

$$c_1(\mathcal{L}'_0) = \frac{i}{2\pi}F = dt \wedge [u] + \underbrace{\frac{i}{2\pi}td(u^{-1}du)}_{=0} = dt \wedge [u].$$

Daraus folgt mit (4.2) und (4.3), dass

$$\delta(\Phi, u\Phi) = \int_{[0,1] \times Y} dt \wedge [u] \wedge c_1(W) = \int_Y [u] \wedge c_1(W)$$

ist, was die Behauptung impliziert. \square

Korollar 4.6 *Sei die Situation wie im obigen Lemma 4.5 und Φ_0 und Φ_1 zwei nicht verschwindende Schnitte im Bündel $W \rightarrow Y$ und $u : Y \rightarrow S^1$ wieder ein Automorphismus von \tilde{Q} , dann gilt*

$$\delta(\Phi_0, u\Phi_1) = \delta(\Phi_0, \Phi_1) + \langle ([u] \smile c_1(W)), [Y] \rangle$$

Beweis: Die Auswertung von relativen Eulerklassen hängt nicht von der Wahl des generischen Schnittes ab, man kann daher zunächst einen Schnitt wählen der Φ_0 mit Φ_1 und dann einen der Φ_1 mit $u\Phi_1$ verbindet. Von diesen Schnitten zählen wir dann die Nullstellen. \square

Es ist nach der Konstruktion aus dem Beweis von Proposition 2.14 klar, dass in der Faser $p^{-1}(\tilde{Q})$ einer $Spin^c$ -Struktur zwei 2-Ebenen-Felder ξ_0 und ξ_1 genau dann homotop sind, wenn die Differenz $\delta(\Phi_0, \Phi_1)$ ihrer assoziierten Spinoren Φ_0 und Φ_1 gleich Null ist.

Dieses erklärt mit Korollar 4.6 die Wohldefiniertheit folgender Definition.

Definition 4.5 (i) Sei $\tilde{Q} \in Spin^c(Y)$. Dann definieren wir $div(\tilde{Q}) \in \mathbb{Z}$, so dass $div(\tilde{Q})\mathbb{Z}$ die Untergruppe von \mathbb{Z} ist, die aus allen $\langle ([u] \smile c_1(W)), [Y] \rangle$ besteht. Falls diese Untergruppe nur aus der Null besteht, definieren wir $div(\tilde{Q}) = 0$.

(ii) Seien $\xi_0, \xi_1 \in p^{-1}(\tilde{Q})$ 2-Ebenen-Felder mit Φ_0 und Φ_1 als ihre im Sinne von Proposition 2.14 assoziierten Spinoren, dann definieren wir die Differenz durch

$$\bar{\delta}(\xi_0, \xi_1) := \delta(\Phi_0, \Phi_1) \text{ in } \mathbb{Z}/div(\tilde{Q})\mathbb{Z}.$$

Proposition 4.7 *Sei $\tilde{Q} \rightarrow Y$ eine Spin^c -Struktur und $\xi_0 \in p^{-1}(\tilde{Q})$ fixiert. Dann ist die Abbildung $p^{-1}(\tilde{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}/\text{div}(\tilde{Q})\mathbb{Z}$ mit der Vorschrift $\xi_1 \rightarrow \bar{\delta}(\xi_0, \xi_1)$ injektiv.*

Beweis: Nach den obigen Betrachtungen und der Beliebigkeit von ξ_0 bleibt lediglich noch folgendes sicherzustellen: Sei $\xi_1 \in p^{-1}(\tilde{Q})$, so dass

$$\bar{\delta}(\xi_0, \xi_1) = 0 \text{ in } \mathbb{Z}/(\text{div}(\tilde{Q})\mathbb{Z})$$

ist, dann sind ξ_0 und ξ_1 homotop bzw. es gibt ein $u : Y \rightarrow S^1$, das den zu ξ_0 assoziierten Spinor Φ_0 auf den zu ξ_1 assoziierten Spinor Φ_1 oder einen zu Φ_1 homotopen (im Raum der nicht verschwindenden Schnitte) Schnitt abbildet. Per Definition von $\text{div}(\tilde{Q})$ gibt es unter diesen Voraussetzungen ein $u : Y \rightarrow S^1$, so dass $\delta(\Phi_0, u\Phi_0) = \delta(\Phi_0, \Phi_1)$ erfüllt (falls $\text{div}(\tilde{Q}) = 0$ ist, wähle man u als die Identität von W). Daraus folgt aus der Definition der relativen Eulerklasse bzw. von δ , dass $\delta(\Phi_1, u^{-1}\Phi_0) = 0$ ist. Da aber eine verschwindende relative Eulerklasse (die hier δ definiert) einen nicht verschwindenden Schnitt mit den gegebenen Randbedingungen impliziert (siehe [41, §III]), folgt, dass Φ_1 und $u^{-1}\Phi_0$ zueinander homotop sind, was den Beweis abschliesst. \square

Lemma 4.8 *Sei $\tilde{Q} \rightarrow Y$ und Φ_0 ein nicht verschwindender Schnitt im Spinorbündel $W \rightarrow Y$. Sei $m \in \mathbb{Z}$, dann existiert ein nicht verschwindender Schnitt Φ_1 in $W \rightarrow Y$, so dass $\delta(\Phi_0, \Phi_1) = m$ gilt.*

Beweis: ObdA. ist (vgl. Korollar 4.6) $m = \pm 1$. Sei zunächst $m = 1$. Sei eine nullstellenfreie Homotopie von Φ_0 nach Φ_0 als Schnitt in $W \rightarrow [0, 1] \times Y$ gegeben. Lokal kann man in $[0, 1] \times Y$ eine Nullstelle x_0 vom Index 1 erzwingen, die an anderer Stelle durch eine Nullstelle x_1 von Index -1 wieder ausgeglichen wird: Durch betrachten eines kleinen Balls um x_0 in $[0, 1] \times Y$ kann man einen Schnitt über diesem Ball wählen, der genau die gewünschte Nullstelle mit Index $+1$ im Mittelpunkt x_0 hat. Dann wählt man eine generische Fortsetzung mit der entsprechenden Randbedingung Φ_0 auf $\{0, 1\} \times Y$ und auf dem Rand des Balles.

Man kann nun obdA. annehmen, dass die t -Koordinate $t(x_1)$ von x_1 größer ist als die von x_0 (denn die Ausgleichsnullstelle x_1 kann ebenfalls an beliebiger Stelle erzwingen werden, alle dann auftretenden Nullstellen sind in der Summe gleich 0 und können wegen [41, §III] als nicht existent angenommen werden). Dann verwendet man als Φ_1 den Schnitt der über $\{1/2(t(x_0) + t(x_1))\} \times Y$ lebt. Der Fall $m = -1$ folgt aus Symmetriegründen vollkommen analog. \square

Korollar 4.9 *In der selben Situation wie im obigen Lemma 4.8, ist die Faser $p^{-1}(\tilde{Q})$ isomorph zu $\mathbb{Z}/\text{div}(\tilde{Q})\mathbb{Z}$.*

Beweis: Proposition 4.7 und Lemma 4.8. □

4.3 Die SW-Gleichungen auf dem Zylinder

Sei Y wieder eine geschlossene, orientierte Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit und $\tilde{Q} \in \text{Spin}^c(Y)$ eine Spin^c -Struktur mit Spinorbündel $W \rightarrow Y$, so dass W gleich dem Pullback des Plus-Spinorbündel $W^+ \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ der entsprechenden Spin^c -Struktur \tilde{P} auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times Y$ ist (siehe §2.1.2.2).

Definition 4.6 Ein Spin^c -Zusammenhang A der Spin^c -Struktur $\tilde{P} \rightarrow \mathbb{R} \times Y$ heisst *temporal geeicht*, wenn die dt -Komponenten der Zusammenhangs-1-Form von A verschwindet.

4.3.1 Das Chern-Simons-Dirac-Funktional

Wir betrachten auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times Y$ die unperturbierten Seiberg-Witten-Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho(F_A^+) - \{\Phi \otimes \Phi^*\} &= 0 \\ D_A \Phi &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

und untersuchen Lösungen (A, Φ) , die in temporaler Eichung (d.h. A ist in temporaler Eichung) sind.

Definition 4.7 Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(\tilde{Q})$ den Raum von L^2_3 -Konfigurationen (B, Ψ) bestehend aus einem L^2_3 - Spin^c -Zusammenhang B auf dem Spinorbündel W und einem L^2_3 -Spinor Φ im Bündel W .

Wir können nun Lösungen von (4.5) als negativen Gradienten-Fluss schreiben:

Proposition 4.10 *Lösungen von (4.5) in temporaler Eichung entsprechen genau dem negativen (L^2 -)Gradientenfluss des folgenden sogenannten Chern-Simons-Dirac-Funktionsals auf $\mathcal{C}(\tilde{Q})$:*

$$\text{CSD}(B, \Psi) = -\frac{1}{2} \left(\int_Y (B - B_0) \wedge (F_{\hat{B}} + F_{\hat{B}_0}) + \int_Y \langle \Psi, D_B \Psi \rangle \right),$$

dabei bezeichne D_B den 3-dimensionalen Dirac-Operator (vergleiche §2.1.4.1), B_0 ein beliebiger fixierter Spin^c -Zusammenhang auf dem Bündel W und $F_{\hat{B}}$ bzw. $F_{\hat{B}_0}$ die jeweils induzierte Krümmung auf dem Determinanten-Linienbündel von $W \rightarrow Y$. Weiterhin bezeichne hier $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das reelle Skalarprodukt auf W .

Beweis: Wir rechnen zunächst die Ableitungen von CSD in B -Richtung und in Ψ -Richtung aus. Es gilt nun für eine rein imaginäre 1-Form B' an einer beliebigen Konfiguration $(B, \Psi) \in \mathcal{C}(\tilde{Q})$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{CSD}(tB' + B, \Psi)) &= -\frac{1}{2} \left(\int_Y B' \wedge (F_{\hat{B}} + F_{\hat{B}_0}) \right. \\ &\quad \left. + \int_Y (B - B_0) \wedge (2dB') - \int_Y \langle \Psi, \rho(B') \Psi \rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_Y B' \wedge (F_{\hat{B}} + F_{\hat{B}_0}) \right. \\ &\quad \left. + \int_Y ((F_{\hat{B}} - F_{\hat{B}_0})) \wedge B' - \int_Y \langle \Psi, \rho(B') \Psi \rangle \right) \\ &= - \int_Y B' \wedge F_{\hat{B}} - \frac{1}{2} \int_Y \langle \Psi, \rho(B') \Psi \rangle \quad (4.6) \end{aligned}$$

(die erste Identität folgt aus partieller Integration). Da nun auch D_B selbstadjungiert (vergleiche [34, §3.3, Lem. 3.3.3], der Beweis ist auf die 3-dimensionale Situation ohne Probleme übertragbar) ist, erhält man analog für einen Spinor Ψ' im Bündel W die Identität

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{CSD}(B, t\Psi' + \Psi)) = - \int_Y \langle D_B \Psi, \Psi' \rangle. \quad (4.7)$$

In den folgenden Rechnungen verwenden wir eine hochgestellte (3) oder (4) um anzugeben, ob wir uns in der 3-dimensionalen oder 4-dimensionalen Situation befinden. Zuerst befassen wir uns mit der Krümmungsgleichung (4.5) der SW-Gleichungen auf dem Zylinder, diese ist wegen temporaler Eichung äquivalent zu

$$dt \wedge \frac{d}{dt}(A) = -F_{\hat{A}}^{(3)} - *F_{\hat{A}}^{(4)} + 2(\rho^{(4)})^{-1}(\{\Phi \otimes \Phi^*\}).$$

Extrahieren wir nun die $dt \wedge$ -Anteile und wenden $\rho^{(4)}$ an, folgt daraus

$$\rho^{(4)}(dt)\rho^{(4)}\left(\frac{d}{dt}(A)\right) = 2\rho^{(4)}(dt \wedge (*^{(3)}F_{\hat{A}}^{(3)})) + \{\Phi \otimes \Phi^*\},$$

dabei verwende man, dass für eine 2-Form γ in Y das Verhalten $*^{(4)}\gamma = -dt \wedge (*^{(3)}\gamma)$ gilt. Hieraus leiten wir nun wegen $\rho^{(4)}(dt)\rho^{(4)}(\cdot) = \rho^{(3)}(\cdot)$ (vgl. §2.1.2.2) die Identität

$$\frac{d}{dt}(A) = *F_{\hat{A}}^{(3)} + 2(\rho|_{\Lambda^1}^{(3)})^{-1}(\{\Phi \otimes \Phi^*\}) \quad (4.8)$$

ab. Vergleichen wir nun (4.6) mit (4.8) und erinnern uns daran, dass Einsetzen eines nichtverschwindenden Vektorfeldes in eine selbstduale 2-Form, diese eindeutig bestimmt, erhalten wir die Behauptung für die Krümmungsgleichung. Nun nehmen wir uns der Dirac-Gleichung aus (4.5) an, mit der wir

$$0 = D_A^{(4)}\Phi = -\rho^{(4)}(dt) \cdot (D_A^{(3)}\Phi) + \rho^{(4)}(dt) \cdot \left(\frac{d}{dt}\Phi\right)$$

und daraus dann

$$D_A^{(3)}\Phi = \frac{d}{dt}\Phi \quad (4.9)$$

ableiten. Vergleicht man jetzt (4.7) mit (4.9), folgt die Behauptung auch für die Dirac-Gleichung. \square

Korollar 4.11 *Sei μ eine geschlossene reelle 2-Form auf Y , dann werden die Gleichungen für den negativen Gradientenfluss des perturbierten Chern-Simons-Dirac-Funktional*

$$\text{CSD}_\mu(B, \Psi) = -\frac{1}{2} \left(\int_Y (B - B_0) \wedge (F_{\hat{B}} + F_{\hat{B}_0} + 2i\mu) + \int_Y \langle \Psi, D_B \Psi \rangle \right),$$

durch folgenden perturbierten Seiberg-Witten-Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho(F_A^+ + i\mu) - \{\Phi \otimes \Phi^*\} &= 0 \\ D_A \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

auf dem Zylinder $\mathbb{R} \times Y$ erfüllt.

Beweis: Dies erhält man aus analogen Rechnungen wie für (4.6), (4.7), (4.8) und (4.9). \square

Wir wollen im folgenden μ immer als eine geschlossene 2-Form auf Y wählen, was durch folgendes Lemma motiviert wird.

Lemma 4.12 *Sei $u : Y \rightarrow S^1$ eine L_4^2 -Eichtransformation, die in der Komponente (aller L_4^2 -Eichtransformationen) der Identität liegt und sei $\mu \in H^2(Y; \mathbb{R})$, dann ist CSD_μ invariant unter u , d.h. für eine Konfiguration $(B, \Psi) \in \mathcal{C}(\tilde{Q})$ gilt*

$$\text{CSD}_\mu(B - u^{-1}du, u\Psi) - \text{CSD}_\mu(B, \Psi) = 0.$$

Beweis: Wir können oBdA. annehmen, dass (B, Ψ) und u glatt sind. Nun gilt nach der Produktregel für Dirac-Operatoren und wegen $u^* = \bar{u}$

$$\begin{aligned} \langle u\Psi, D_{B-u^{-1}du}\Psi \rangle &= \langle u\Psi, \rho(du)\Psi + uD_B\Psi + \rho(-u^{-1}du)u\Psi \rangle \\ &= \langle u\Psi, uD_B\Psi \rangle \\ &= \langle \Psi, D_B\Psi \rangle. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Verwenden wir wieder die Notation $[u] = u^{-1}du$ für die entsprechende Co-homologiekategorie, gilt mit obiger Rechnung

$$\text{CSD}_\mu(B - u^{-1}du, u\Psi) - \text{CSD}_\mu(B, \Psi) = -\frac{1}{2} \int_Y -[u] \wedge \gamma,$$

wobei

$$\gamma = F_{\hat{B}} + F_{\hat{B}_0} + 2i\mu \tag{4.12}$$

eine geschlossene 2-Form ist, die sich aus dem geschlossenen μ und den geschlossenen Krümmungstermen zusammensetzt. Da nun u in der Komponente der Identität liegt, ist u homotop zur Identität und somit ist $u^{-1}du$ zur 0 cohomolog, woraus die Behauptung folgt. \square

4.3.2 3-Dimensionale Seiberg-Witten-Theorie

Nachdem wir gesehen haben, dass Lösungen auf dem Zylinder dem negativen Gradientenfluss des perturbierten CSD-Funktional CSD_μ entsprechen, brauchen wir noch geeignete Randbedingungen. Bei negativen Gradientenflüssen bieten sich die kritischen Punkte des Funktional auf dem Rand an, welche sich als Lösungen der 3-dimensionalen SW-Gleichungen herausstellen werden:

Lemma 4.13 *Sei wieder μ eine geschlossene 2-Form auf Y . Kritische Punkte des Funktional CSD_μ sind Lösungen der folgenden 3-dimensionalen Seiberg-Witten-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \rho(F_{\hat{B}} + i\mu) - \frac{1}{2}\{\Psi \otimes \Psi^*\} &= 0 \\ D_B\Psi &= 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die Menge der kritischen Punkte von CSD_μ ist invariant unter der ganzen Gruppe der L_4^2 -Eichtransformationen.

Beweis: Die erste Behauptung wird aus (4.6) und (4.7) bzw. Korollar 4.11 klar. Die Rechnungen (4.11) und (4.6) zeigen die Invarianz unter Eichtransformationen. \square

Definition 4.8 (i) Es bezeichne $\mathcal{G}(\tilde{Q})$ den Raum der L^2_4 -Eichtransformationen. Dann definieren wir $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ den Raum aller Lösungen der 3-dimensionalen Seiberg-Witten-Gleichungen (4.13) modulo $\mathcal{G}(\tilde{Q})$.

(ii) Wir nennen eine Lösung (B, Ψ) von (4.13) *reduzibel*, wenn $\Psi \equiv 0$ ist und wir nennen sie *nicht-degeneriert*, wenn der Kern der Hesse'schen von $\text{CSD}_\mu^{(N, \Psi)}$ gleich dem Tangentialraum des $\mathcal{G}(\tilde{Q})$ -Orbits durch (B, Ψ) ist.

Folgende Aussage über $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ kann als der erste Teil des Beweises der Endlichkeitsaussage angesehen werden.

Proposition 4.14 *Sei μ eine beliebige geschlossene 2-Form auf Y .*

(i) *Der Raum $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ ist kompakt und bis auf endlich viele Spin^c -Strukturen $\tilde{Q} \in \text{Spin}^c(Y)$ leer.*

(ii) *Falls μ für einen beliebigen Spin^c -Zusammenhang B nicht zu $iF_{\tilde{B}}$ cohomolog ist gibt es für jedes $r \geq 0$ eine Baire-Menge von exakten C^r -Formen μ' so dass $\mathcal{N}_{\mu+\mu'}(\tilde{Q})$ aus endlich vielen nicht degenerierten irreduziblen kritischen Punkten besteht (man beachte, dass wegen Chern-Weil-Theorie alle $F_{\tilde{B}}$ für alle Spin^c -Zusammenhänge zueinander cohomolog sind, daher ist die Wahl von B unerheblich und diese Voraussetzung von B unabhängig).*

Beweisskizze: (i) Analog zu den 4-dimensionalen SW-Gleichungen im kompakten Fall existieren a priori C^0 -Schranken an $|\Psi|$ und somit an die Krümmung $F_{\tilde{B}}$ für Lösungen (B, Ψ) (vgl. [34, §5.2/5.3], [25, Prop. 5.3]).

(ii) Die Nicht-Degeneriertheit einer irreduziblen Lösung für eine generische Wahl einer exakten Perturbation ist Proposition 3 aus [18]. Da aus (4.13) folgt, dass für eine reduzierbare Lösung μ zu $iF_{\tilde{B}}$ cohomolog sein muss, schließen wir mit der Nicht-Degeneriertheits-Bedingung, dass der Tangentialraum von $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ an irreduziblen nicht-degenerierten Lösungen null-dimensional ist. Dies liefert uns die Behauptung. \square

4.4 Mannigfaltigkeiten mit Zylinderenden

In diesem Abschnitt sei (Y, g_1) wie bisher eine orientierte Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit, jedoch mit $b_1(Y) > 0$ und somit wegen Poincaré-Dualität auch $b_2(Y) > 0$. Wir setzen aber nicht voraus, dass Y zusammenhängend ist. Wir betrachten füllbare Kontaktstrukturen auf Y , wobei die Voraussetzung $b_1(Y) > 0$ und Y zusammenhängend für den Beweis der Endlichkeitsaussage keine wirkliche Einschränkung sein wird. Die im vorherigen Abschnitt erklärte Zylindertheorie werden wir im folgenden auf Mannigfaltigkeiten mit einem Zylinderende angewenden. Wir betrachten also die Situation, dass eine orientierte 4-Mannigfaltigkeit X existiert, deren (orientierter) Rand aus Y besteht. Sei weiterhin $\tilde{P} \rightarrow X$ eine $Spin^c$ -Struktur und $\tilde{Q} \rightarrow \partial X = Y$ die Einschränkung von \tilde{P} auf den Rand. Wir wählen mit Proposition 4.14 und der Tatsache, dass $b_2(Y) > 0$ ist, eine geschlossene 2-Form μ auf Y , so dass $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ aus endlich vielen nicht degenerierten irreduziblen Lösungen besteht.

Definition 4.9 Es sei (X_c, g) die Mannigfaltigkeit, die durch Verkleben von X mit $\mathbb{R}^+ \times Y$ an ∂X entsteht und anschließend mit einer Produktstruktur versehen.

Eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow X$ möchten wir, wie in §2.1.2.2, entlang des Zylinderendes von X_c immer kanonisch fortsetzen, d.h. die Einschränkung von \tilde{P} auf Y wird durch die Pullback-Abbildung entlang dem Zylinderende fortgesetzt, was wegen der Wahl der Metrik g auf X_c zu einer globalen $Spin^c$ -Struktur auf X_c führt.

4.4.1 Definition des Seiberg-Witten-Modulraums unter Randbedingungen

Wir werden nun den Seiberg-Witten-Modulraum auf (X_c, g) betrachten, dabei verwenden wir als Randwerte Lösungen $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ wie folgt: Sei $\Gamma_\alpha = (A_\alpha, \Phi_\alpha)$ ein Paar bestehend aus einem $Spin^c$ -Zusammenhang A_α der $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} und einem Spinor Φ_α im Bündel W^+ , wobei unter der Pullback-Abbildung auf dem Zylinderende (A_α, Φ_α) gleich einem Eichrepräsentanten von α ist.

Sei $\epsilon > 0$ kleiner als der kleinste positive Eigenwert der Hesse'schen von CSD_μ an α (eine solche Wahl ist möglich [31, §3.3]). Wir definieren den Konfigurationsraum in Abhängigkeit von Γ_α durch

$$\mathcal{G}(\Gamma_\alpha) = \{(A, \Phi) \mid (A - A_\alpha) \in e^{-\epsilon\tau} L_l^2 \text{ und } (\Phi - \Phi_\alpha) \in e^{-\epsilon\tau} L_{l, A_\alpha}^2\} \quad (4.14)$$

und Gruppe der Eichtransformationen

$$\mathcal{G}\{u : X_c \rightarrow \mathbb{C} \mid |u| = 1 \text{ und } (1 - u) \in e^{-\epsilon\tau} L_{l+1}^2\}, \quad (4.15)$$

wobei $\tau : X_c \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die auf dem Zylinderende $\mathbb{R}^+ \times Y$ gleich der t -Koordinationsfunktion ist und l wie in §3.2.1 gewählt sei. Analoge Aussagen zu Satz 3.3 und Theorem 3.2 (vgl. [31, §2.2] und [9]) gelten für diese Situation, d.h. insbesondere, dass \mathcal{G} als Hilbert-Lie-Gruppe glatt und frei auf $\mathcal{G}(\Gamma_\alpha)$ operiert und die Sobolev-Einbettungen und Sobolev-Multiplikations-Sätze gelten. Sei $r > l$ und η ein Schnitt in $isu(W^+)$, so dass

$$\eta + \rho(ic\mu) \in e^{-\epsilon\tau} C^r \quad (4.16)$$

für eine Abschneidefunktion $c : X_c \rightarrow \mathbb{R}^+$, die auf dem Zylinderende getragen wird und für $t \geq 1$ konstante gleich 1 ist, gilt.

Definition 4.10 Wir definieren den Modulraum $\mathcal{M}_\eta(\Gamma_\alpha)$ als die Menge aller \mathcal{G} -Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}(\Gamma_\alpha)$, die folgende perturbierten Seiberg-Witten-Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \rho(F_A^+) - \{\Phi \otimes \Phi^*\} &= \eta \\ D_A \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Wir definieren $\mathcal{M}_\eta(X, \alpha)$ als die Vereinigung aller $\mathcal{M}_\eta(\Gamma_\alpha)$, wobei Γ_α alle Eichrepräsentanten von α durchläuft, modulo der Wirkung von \mathcal{G} , d.h. $\mathcal{M}_\eta(\Gamma_1)$ und $\mathcal{M}_\eta(\Gamma_2)$, die beide aus α gewonnen wurden, heissen äquivalent, wenn es ein $u \in \mathcal{G}$ gibt, dass $u\Gamma_1 = \Gamma_2$ erfüllt.

Der Raum $\mathcal{M}_\eta(X, \alpha)$ kann tatsächlich größer sein als $\mathcal{M}_\eta(\Gamma_\alpha)$, da eine Eichtransformation u auf Y bzw. auf dem Zylinderende nicht notwendigerweise auf ganz X_c fortsetzbar ist.

4.4.2 Formale Dimension des SW-Modulraums und Eigenschaften

Sei Γ_α wie im vorherigen Abschnitt. Sei δ_1 die Linearisierung der Eichtransformation und δ_2 die Linearisierung der SW-Gleichungen aus (4.17) auf $\mathcal{C}(\Gamma_\alpha)$, dann sei $\mathcal{D} = \delta_1^* + \delta_2$ (vergleiche §3.3.2). Wir werden zeigen, dass \mathcal{D} ein Fredholmoperator ist und wie dessen Index berechnet werden kann. Um dieses Problem zu lösen, werden wir die Ergebnisse über Operatoren mit Atiyah-Patodi-Singer-Randbedingungen in diesem Kontext aus [1], [37] und [31] verwenden.

Theorem 4.15 *Sei wieder \mathcal{D} die Linearisierungen der SW-Gleichungen (4.17) mit der entsprechenden Eichfixierung. Dann ist \mathcal{D} ein Fredholmoperator. Definiere dann $i(\Gamma_\alpha) = \text{ind}(\mathcal{D})$ als den Fredholm-Index. Seien nun Γ_1 und Γ_2 beide aus α gewonnen und es existiere eine L^2_{i+1} -Eichtransformation $u : Y \rightarrow S^1$ mit $u\Gamma_1 = \Gamma_2$, dann gilt unter der Voraussetzung $\text{div}(\tilde{Q}) = 0$ für die Differenz der Indizes*

$$i(\Gamma_1) - i(\Gamma_2) = 0.$$

Dieses Theorem lässt folgende Definition zu:

Definition 4.11 Seien alle Voraussetzungen von Theorem 4.15 erfüllt, dann definieren wir für $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$

$$i(X, \tilde{P}, \alpha) = i(\Gamma_\alpha)$$

mit einem beliebigen Γ_α , das auf dem Zylinderende von X_c gleich einem Eichrepräsentanten von α ist.

In diesem Fall ist die formale Dimension von $\mathcal{M}_\eta(X, \alpha)$ also gleich $i(X, \tilde{P}, \alpha)$.

Beweisskizze: Nach [31, §2.2] ist der Operator \mathcal{D} Fredholm'sch und kann auf dem Zylinderende in die APS-Gestalt (siehe [1] bzw. [37, §4]) verformt werden, ohne dabei die Fredholm-Klasse zu verlassen (siehe [2] bzw. [31, §3]). Wir möchten nun zeigen, dass die zu untersuchende Indextdifferenz gleich 0 ist. Die Spinoren in den Konfigurationen Γ_1 und $\Gamma_2 = u\Gamma_1$ haben wegen der elliptischen Dirac-Gleichung nur isolierte Nullstellen und sind somit homotop zu Konfigurationen deren Spinoren Φ_1 und Φ_2 keine Nullstellen haben. Also gelte dies oBdA. und dann sind Φ_1 und Φ_2 wegen der Bedingung $\text{div}(\tilde{Q}) = 0$ nach Lemma 4.5, als nicht verschwindende Schnitte im Bündel W zueinander homotop. Die gesuchte Differenz ist dann nach [31, §4], [2] durch den Index der Linearisierung der SW-Gleichungen respektive derjenigen Spin^c -Struktur auf $S^1 \times Y$, die durch das Verklebeargument im Beweis von Lemma 4.5 entsteht, wo Φ_1 mit $u\Phi_1 = \Phi_2$ verklebt wird, gegeben. Auf $S^1 \times Y$ gibt es wegen der Homotopie zwischen Φ_1 und Φ_2 ein nicht verschwindendes Schnitt im positiven Halbspinorbündel. Also ist die Spin^c -Struktur auf dem $S^1 \times Y$ durch eine fast komplexe Struktur J induziert (siehe Proposition 2.12). In Proposition 3.19 haben wir gezeigt, dass in diesem Fall auf X^+ die Linearisierung der SW-Gleichungen mit Eichfixierung den Index 0 hat. Wir können den Beweis aber auch auf unseren Fall von $S^1 \times Y$ übertragen, da es nicht auf die Geschlossenheit der von J induzierten selbstdualen 2-Form ω ankommt, sondern nur auf die explizite lokale Darstellung des Linearisierungs-Operators. \square

Wir brauchen noch zwei Resultate über die Zylinderenden-Modulräume, die in den folgenden beiden Sätzen formuliert sind.

Satz 4.16 Falls $i(\Gamma_\alpha) < 0$, dann gibt es eine Baire-Menge von Perturbationen η , unter all denjenigen die (4.16) erfüllen, so dass der Modulraum $\mathcal{M}_\eta(\Gamma_\alpha)$ leer ist.

Beweisskizze: Wegen unserer Wahl von μ gibt es keine reduziblen Lösungen. Der Beweis (vgl. [25, Prop. 5.4]) verläuft ähnlich wie im geschlossenen Fall (vgl. [34, §6]) bzw. im Kegelfall (siehe §3.4.2). Die notwendige Fredholmtheorie für Zylinderenden findet man in [1], [30] und [42]. Nun kann man, wie §3.4.2, mit demselben Transversalitätsargument sehen, dass der Modulraum generisch eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $i(\Gamma_\alpha)$ ist. \square

Definition 4.12 Wir sagen, eine Konfiguration (A, Φ) auf der Zylinderenden-Mannigfaltigkeit X_c hat endlich Variation, wenn $\text{CSD}_\mu(A(t), \Phi(t))$ gleichmäßig beschränkt ist.

Satz 4.17 Sei (A, Φ) eine Lösung von (4.17) auf X_c mit endlicher Variation entlang dem Zylinderende, dann gibt es ein $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$, so dass die Konfiguration (A, Φ) zu einem Element aus $\mathcal{C}(\Gamma_\alpha)$ eichäquivalent und somit ein Element aus $\mathcal{M}_\eta(X, \alpha)$ ist.

Beweisskizze: Da μ so gewählt ist, dass alle kritischen Punkte von CSD_μ nicht-degeneriert sind, folgt dies (vgl. [25, Prop. 5.5]) aus exponentiellen Abfallbedingungen für Perturbationen von Gradientenfluss-Gleichungen, die man in [36] findet. \square

4.4.3 Kritische Punkte und 2-Ebenen-Felder

Sei (Y, ξ) eine symplektisch füllbare 3-Mannigfaltigkeit mit Kontaktstruktur ξ und $b_1(Y) = b_2(Y) > 0$. Es sei wieder $\tilde{Q} \rightarrow Y$, die von ξ induzierte Spin^c -Struktur. Wir wollen in diesem Abschnitt voraussetzen, dass

$$\text{div}(\tilde{Q}) = 0$$

gilt. Wir wählen μ wieder so, dass $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ aus endlich vielen nicht-degenerierten irreduziblen Punkten besteht.

Es sei Ξ_Y die Menge aller Homotopieklassen von orientierten 2-Ebenen-Feldern auf Y . Ziel dieses Abschnittes ist dann eine universelle Funktion

$$I : \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q}) \rightarrow \pi_0(\Xi_Y)$$

anzugeben. Diese Funktion wird wegen der Endlichkeit des Modulraums \mathcal{N}_μ eine entscheidende Rolle im Beweis der Endlichkeitsaussage spielen.

Sei X kompakt mit orientiertem Rand $\partial X = Y$, wie im vorherigen Abschnitt. Weiterhin sei X mit einer $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} versehen, die eingeschränkt auf Y gleich \tilde{Q} ist.

Sei $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ beliebig. Wegen Lemma 4.8 und Theorem 4.15 gibt es einen bis auf Homotopie eindeutigen Schnitt Φ_α der konstanten Länge 1 im Bündel $W^+|_Y = W \rightarrow Y$, so dass

$$\langle e(W^+; \Phi_\alpha), [X, \partial X] \rangle = i(X, \tilde{P}, \alpha)$$

gilt. Wir setzen nun

$$I_{\tilde{Q}}(\alpha) = [\xi_1] \in \pi_0(\Xi_Y),$$

wobei ξ , das durch Φ_1 induzierte 2-Ebenen-Feld ist (siehe Proposition 2.14). Falls es klar ist, welche $Spin^c$ -Struktur gemeint ist, lassen wir das nach unten gestellte \tilde{Q} weg.

Theorem 4.18 *Die Definition von $I : \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q}) \rightarrow \pi_0(\Xi_Y)$ ist unabhängig von X .*

Um dieses Theorem zu zeigen, brauchen wir folgende Proposition:

Proposition 4.19 *Sei (M, g) eine orientierte geschlossene Riemannsche 4-Mannigfaltigkeit und $\tilde{P} \rightarrow M$ eine $Spin^c$ -Struktur mit assoziierten Spinorbündel $W = W^+ \oplus W^- \rightarrow M$, dann gilt*

$$\langle e(W^+), [M] \rangle = (c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))/4 = \text{ind}(\mathcal{D}), \quad (4.18)$$

wobei $\mathcal{L} = \det(W^+)$ das Determinanten-Linienbündel von \tilde{P} und \mathcal{D} die Linearisierung der Seiberg-Witten-Gleichungen mit entsprechender Eichfixierung bezeichne (vgl. §2.1.4.4).

Beweis: Hierfür geben wir einen fast rein geometrisch/topologischen Beweis im Appendix A. □

Beweisskizze von Theorem 4.18: Seien also X und X' zwei vierdimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand Y sowie $Spin^c$ -Strukturen \tilde{P} und \tilde{P}' (respektive) im obigen Sinne und sei $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$. Seien \mathcal{D} und \mathcal{D}' die entsprechenden APS-Operatoren auf X_c bzw. X'_c und sei weiter Φ_1 ein Schnitt in $W \rightarrow Y$, so dass

$$\langle e(W^+; \Phi_1), [X, \partial X] \rangle = i(X, \tilde{P}, \alpha) \quad (4.19)$$

gilt. Es reicht zu zeigen, dass dann

$$\langle e(W^+; \Phi_1), [X', \partial X'] \rangle = i(X', \tilde{P}', \alpha) \quad (4.20)$$

gilt.

OBdA. haben X und X' in der Nähe des Randes Y isomorphe Produktstrukturen der Gestalt $[1, 1 + \epsilon) \times Y$. Wir orientieren X' zu $-X'$ um und betrachten weiterhin ξ als orientiertes 2-Ebenen-Feld auf dem umorientierten Rand $-Y$. Bei dieser Umorientierung erhalten wir die $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P}'_- \rightarrow -X'$, die eingeschränkt auf den Rand $-Y$ gleich \tilde{Q}_- ist und von der 4-dimensionalen $Spin^c$ -Struktur auf dem Zylinder $-([1, 1 + \epsilon) \times Y)$ kommt (vgl. Beweis von Proposition 2.14). Durch diesen Vorgang werden die Bündel W^\pm auf die zu \tilde{P}'_- assoziierten Spinorbündel W^\mp in dieser Reihenfolge isomorph abgebildet.

Wir verkleben nun X mit $-X'$ entlang Y zu $X^\#$, wobei sich dann wegen der Wahl der Orientierungen \tilde{P} mit \tilde{P}'_- entlang Y zu einer globalen $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P}^\#$ verklebt. Analog verkleben sich die Spinorbündel W^\pm mit W^\mp zu den zu $\tilde{P}^\#$ assoziierten Spinorbündeln $W^{\#, \pm} \rightarrow X^\#$.

Wir verwenden nun den APS-Indexsatz bzw. APS-Theorie im Seiberg-Witten-Kontext (vgl. [31], [1], [2], [37, §4]). Dieser besagt einerseits, dass der Index von \mathcal{D}' auf X' das Vorzeichen ändert, wenn man zu $-X'$ umorientiert und andererseits, wenn man X mit $-X'$, wie oben beschrieben, zu $X^\#$ verklebt, die Randbedingungen keine Rolle mehr spielen, d.h. der Index der Linearisierung der SW-Gleichungen auf $X^\#$ ist gleich der Index-Differenz

$$\text{ind}(\mathcal{D}) - \text{ind}(\mathcal{D}').$$

Dies ist im allgemeinen APS-Setup für Zylinderenden-Mannigfaltigkeiten falsch, sondern nur bis auf den Kern des Modell-Operators auf dem Rand richtig. Dieser Operator ist bei uns das Differential von CSD_μ an α . Die Nicht-Degeneriertheit und Irreduzibilität von α stellen aber sicher, dass dieser in unserem Fall keinen Kern hat und unsere Folgerung richtig bleibt.

Wir haben also, dass

$$\text{ind}(\mathcal{D}) - \text{ind}(\mathcal{D}') = i(X', \tilde{P}', \alpha) - i(X, \tilde{P}, \alpha)$$

gleich dem Index der Linearisierung der SW-Gleichungen (mit Eichfixierung) auf dem geschlossenen $X^\#$ ist und somit wegen Proposition 4.19 gleich der Eulerklasse von $W^{\#, +}$ ist:

$$i(X', \tilde{P}', \alpha) - i(X, \tilde{P}, \alpha) = \langle e(W^{\#, +}), [X^\#] \rangle. \quad (4.21)$$

Nach obiger Konstruktion ist $W^+|_Y = W^-|_{-Y}$, was

$$\langle e(W^-; \Phi_1), [-X', -Y] \rangle = -\langle e(W^+; \Phi_1), [X', Y] \rangle \quad (4.22)$$

erklärt. Nach Bemerkung 4.4 gilt nun mit dieser Gleichung (4.22)

$$\begin{aligned}\langle e(W^{\#,+}), [X^\#] \rangle &= \langle e(W^+; \Phi_1), [X, Y] \rangle + \langle e(W^-; \Phi'_1), [-X', -Y] \rangle \\ &= \langle e(W^+; \Phi_1), [X, Y] \rangle - \langle e(W^+; \Phi'_1), [X', Y] \rangle\end{aligned}$$

Setzt man dies in (4.21) ein und verwendet man anschließend (4.19), folgt die Behauptung (4.20). \square

4.5 Beweis der Endlichkeitsaussage

Sei wieder (Y, ξ) eine geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit mit induzierter $Spin^c$ -Struktur $\tilde{Q} \rightarrow Y$. Wir nehmen an, dass für eine geschlossene 2-Form μ auf Y der Modulraum $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ aus endlich vielen irreduzibel nicht-degenerierten Punkten besteht. Falls nun ξ symplektisch füllbar ist, können wir für den Beweis der Endlichkeitsaussage folgendes wichtiges Zwischenergebnis zeigen.

Proposition 4.20 *Sei (Y, ξ) wie oben und zusätzlich zusammenhängend und sei (X, ω) eine symplektische Füllung. Weiterhin bestehe für eine geschlossene 2-Form μ und eine spezielle Wahl der Metrik g_Y auf Y der Modulraum $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ aus endlich vielen irreduzibel nicht-degenerierten Punkten. Falls sich die Cohomologieklassse $[\mu]$ auf ganz X fortsetzen lässt, gelten folgende Aussagen*

1. Der Modulraum $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ ist nicht leer.
2. Falls $\text{div}(\tilde{Q}) = 0$ ist und somit $\bar{\delta}$ Werte in \mathbb{Z} annimmt, gibt es $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$, so dass

$$\bar{\delta}(I_{\tilde{Q}}(\beta), [\xi]) \geq 0 \text{ und } \bar{\delta}([\xi], I_{\tilde{Q}}(\alpha)) \geq 0$$

gilt.

Beweis: Wir betrachten die Kegelen-Mannigfaltigkeit X^+ mit Metrik g , selbstdualer symplektischer Form ω der Länge $\sqrt{2}$ und $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} , so dass für eine generische Perturbation $\eta \in \mathcal{N}$ der Modulraum $\mathcal{M}_\eta(\tilde{P})$ für diese globale zulässige Struktur (X^+, g, ω) nicht leer ist (siehe Korollar 4.3). Stört man die Metrik auf einem Kompaktum zu g' und betrachtet man dann anschließend die von

$$\omega' = \sqrt{2}/|\omega|_{g'}(\omega + *(g')\omega)$$

assoziierte $Spin^c$ -Struktur \tilde{P}' bleiben die Modulräume $\mathcal{M}_\eta(\tilde{P}')$ für eine generische Wahl von η nicht leer, da die Zulässigkeit der Struktur nicht gestört wird (vgl. Definition 3.2). Wir können also oBdA annehmen, dass X^+ eine isometrische Kopie des Zylinders $[-1, 1] \times Y$ mit der Metrik $dt^2 + g_Y$ enthält. Wir wählen eine generische Störung $\eta_1 \in \mathcal{N}$, so dass \mathcal{M}_{η_1} nicht leer ist. Für jedes $R > 1$ sei g_R die Metrik die durch Ersetzen des Zylinders $[-1, 1] \times Y$ durch eine isometrische Kopie von $[-R, R] \times Y$ entsteht. Sei $\eta_R \in \mathcal{N}$ eine generische Perturbation die auf dem Zylinder $[-R, R] \times Y$ gleich $\|\eta_R - \rho(i\mu)\|_{\mathcal{N}} < 1/R$ und $\mathcal{M}_{\eta_R} \neq \emptyset$ erfüllt. Zu jedem $R > 1$ finden wir also Lösungen $[A_R, \Phi_R] \in \mathcal{M}_{\eta_R}$. Sei nun

$$\bar{\gamma}_R : [-R, R] \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{Q})/\mathcal{G}_Y$$

der Pfad, der durch Einschränkung von $[A_R, \Phi_R]$ auf den Zylinder $[-R, R]$ entsteht.

Lemma 4.21 *Die Variation von CSD_μ entlang dem Pfad $\bar{\gamma}_R$ ist gleichmäßig und unabhängig von R beschränkt.*

Beweis: Mit Lemma 3.26 sieht man, dass $|\Phi_R|$ auf dem Zylinder unabhängig von R beschränkt ist, da sowohl $|\eta|$ als auch $|\Phi_R|$ sich mit R skaliert, was mit [25, Lem. 5.7] und [26, Prop. 8] zur Behauptung führt. \square

Fortsetzung des Beweises von Proposition 4.20: Sei nun $R_i > 1$ eine Folge mit $\lim R_i \rightarrow \infty$, dann folgt aus [26, Prop. 7], dass es Zylinder

$$[n_i, n_i + 1] \times Y \subset [-R_i, R_i] \times Y$$

gibt, so dass $[A_{R_i}, \Phi_{R_i}]$ eingeschränkt auf $[n_i, n_i + 1] \times Y$ gegen eine translationsinvariante Lösung in temporaler Eichung $[B, \Psi]$ auf $[0, 1] \times Y$ also gegen ein $[B, \Psi] \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ konvergiert.

Um die zweite Behauptung zu zeigen, nehmen wir nun an, dass $\text{div}(\tilde{Q}) = 0$ gilt. Sei X_c wieder die Mannigfaltigkeit, die man durch Ankleben des Zylinderendes $[0, \infty) \times Y$ am Rand $\partial X = Y$ erhält (siehe §4.4). Wir wählen die Perturbation η auf X_c wieder derart, dass wie in (4.16) $\eta + \rho(i\mu) \in e^{-\epsilon\tau} C^r$ gilt, jedoch mit der generischen Bedingung, dass für alle $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ mit $i(X, \tilde{P}, \alpha) < 0$

$$\mathcal{M}_\eta(X, \tilde{P}, \alpha) = \emptyset$$

gilt. Dies ist wegen Satz 4.16, Theorem 4.15, der Fortsetzbarkeit der Cohomologieklassse $[\mu]$ und der vorausgesetzten Endlichkeit von $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ möglich. Da nun (X, ω) eine symplektische Füllung von (Y, ξ) ist, also

$$\langle e(W^+; \Phi_0), [X, \partial X] \rangle = 0$$

gilt, erhalten wir nach der Definition von $I_{\tilde{Q}}(\alpha)$ (siehe §4.4.3) für jedes $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ die folgende Aussage

$$\begin{aligned} i(X, \mathcal{P}, \alpha) &= \langle e(W^+; \Phi_\alpha), [X, \partial X] \rangle \\ &= \langle e(W^+; \Phi_\alpha, \Phi_0), [[0, 1] \times Y, \partial] \rangle + \underbrace{\langle e(W^+; \Phi_0), [X, \partial X] \rangle}_{=0} \quad (4.23) \\ &= \bar{\delta}([\xi], I_{\tilde{Q}}(\alpha)). \end{aligned}$$

Sei nun wieder R_i eine Folge, die gegen unendlich geht und seien η_{R_i} Perturbationen, so dass die Modulräume \mathcal{M}_{η_i} auf den 'gedehnten' Kegelen- mannigfaltigkeiten (X, g_{R_i}) ein Element $[A_{R_i}, \Phi_{R_i}]$ enthalten. Wegen Generizität der η_{R_i} kann man fordern, dass die η_{R_i} auf kompakten Mengen von X_c gegen ein $\eta_{\mathcal{N}}$ konvergieren. Wegen Theorem 3.20 kann man nach einem Übergang zu einer Teilfolge eine Lösung (A, Φ) der SW-Gleichungen auf der Zylinderenden-Mannigfaltigkeit X_c finden (die erst einmal nicht notwendigerweise entlang dem Zylinderende gegen ein $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ konvergieren muss), so dass eine Folge von Eichrepräsentanten (A_{R_i}, Φ_{R_i}) auf kompakten Mengen von X_c gegen (A, Φ) konvergiert. Nach Lemma 4.21 hat (A, Φ) endliche Variation des CSD-Funktional CSD_μ entlang dem Zylinderende und konvergiert daher wegen Satz 4.17 auf selbigen gegen eine stationäre Lösung $\alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$. Wir haben also (A, Φ) als ein Element des Modulraums $\mathcal{M}_\eta(X, \alpha)$ erhalten. Wegen der generischen Wahl von η und der Dimensionsformel (4.23) gilt für diese α die Ungleichung

$$\bar{\delta}([\xi], I_{\tilde{Q}}(\alpha)) \geq 0.$$

Jetzt kommen wir zur zweiten Ungleichung, die zu zeigen ist. Wir verkleben den Zylinder mit dem Kegelende zu

$$X_{out} = \mathbb{R} \times Y \cup_Y (X^+ \setminus X).$$

Laut [25, Prop 5.6] ist es möglich auf X_{out} eine generische Perturbation η' zu finden, die entlang dem Zylinderende gegen $\rho(i\mu)$ geht und entlang dem Kegelende exponentiell abfällt. Dies ist derart möglich, dass die daraus resultierenden Modulräume $\mathcal{M}_{\eta'}(X_{out}, \xi, \beta)$ für alle $\beta \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ generisch leer sind, wenn ihre formale Dimension, die dann (siehe [25]), wie im vorherigen Fall, durch

$$\bar{\delta}(I(\beta), [\xi])$$

gegeben ist, negativ ist. Die Vertauschung der Argumente in $\bar{\delta}$ verglichen mit dem obigen Fall kommt durch die veränderten Orientungsverhältnisse von Kegelende zum symplektischen Teil. Ein zu oben analoges Konvergenzargument, lässt uns dann ein $\beta \in \mathcal{N}_\mu$ mit

$$\bar{\delta}(I(\beta), [\xi]) \geq 0$$

finden. Dies schliesst den Beweis ab. \square

Der Beweis lässt sich ohne Probleme auf folgende erweiterte Situation übertragen.

Proposition 4.22 *Sei (Y, ξ) wie oben jedoch nicht notwendigerweise zusammenhängend und bestehe daher aus den Zusammenhangskomponenten Y_1, \dots, Y_n . Sei \tilde{Q}_i die induzierte Spin^c -Struktur auf Y_i . Sei (X, ω) eine symplektische Füllung von Y . Weiterhin bestehen für eine geschlossene 2-Form μ und eine spezielle Wahl der Metrik g_{Y_1} auf Y_1 der Modulraum $\mathcal{N}_{\mu_1}(\tilde{Q}_1)$ aus endlich vielen irreduzibel nicht-degenerierten Punkten, wobei $\mu_1 := \mu|_{Y_1}$ sei. Falls sich die Cohomologieklassse $[\mu_1]$ auf ganz X fortsetzen lässt, gelten folgende Aussagen*

1. Der Modulraum $\mathcal{N}_{\mu_1}(\tilde{Q}_1)$ ist nicht leer.
2. Falls $\text{div}(\tilde{Q}_1) = 0$ ist und somit $\bar{\delta}$ Werte in \mathbb{Z} annimmt, gibt es $\alpha, \beta \in \mathcal{N}_{\mu_1}(\tilde{Q}_1)$, so dass

$$\bar{\delta}(I_{\tilde{Q}_1}(\beta), [\xi]) \geq 0 \text{ und } \bar{\delta}([\xi], I_{\tilde{Q}_1}(\alpha)) \geq 0$$

gilt.

Beweis: Wenn man den Zylinder, der zu Y_1 gehört dehnt, erhält man auf vollkommen analoge Weise die Behauptung. \square

Um eine abgeschwächte Version der Endlichkeitsaussage zu beweisen, benötigen wir folgende Definition.

Definition 4.13 Eine Kontaktmannigfaltigkeit (Y, ξ) heisst für ein $\lambda \in H^2(Y; \mathbb{R})$ λ -füllbar, falls sie durch ein (X, ω) füllbar ist, so dass sich λ auf X fortsetzen lässt.

Satz 4.23 *Sei Y eine zusammenhängende, orientierte 3-Mannigfaltigkeit. Sei $\lambda \in H^2(Y; \mathbb{R})$ ungleich 0. Dann gilt, dass die Anzahl der Elemente aus $\pi_0(\Xi)$, die als λ -füllbaren Kontaktstrukturen realisiert werden können, endlich ist.*

Beweis: Wir fixieren eine beliebige Metrik g_Y auf Y und wählen ein $s \in \mathbb{R}$, so dass für einen Repräsentanten $\mu \in s\lambda$ der Modulraum $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ für alle $Spin^c$ -Strukturen keine reduziblen Lösungen enthält. Dies wird durch Proposition 4.14 (ii) und der Tatsache, dass die Menge der $Spin^c$ -Strukturen abzählbar ist, denn diese ist maximal so mächtig wie $H^2(Y; \mathbb{Z})$, ermöglicht. Wiederum nach Proposition 4.14 und der Tatsache, dass ein abzählbarer Schnitt von Baire-Mengen im Raum der exakten C^r -Formen nicht leer ist, können wir nach einer exakten Störung von μ annehmen, dass für alle $Spin^c$ -Strukturen \tilde{Q} die Modulräume $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ aus irreduziblen nicht-degenerierten Lösungen bestehen.

Sei nun ξ eine λ -füllbare (und somit auch $s\lambda$ -füllbare) Kontaktstruktur auf Y und sei (X, ω) die entsprechende Füllung dazu. Sei \tilde{Q} die von ξ induzierte $Spin^c$ -Struktur, dann ist der Modulraum $\mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})$ nach Proposition 4.20 nicht leer. Dies kann wegen Proposition 4.14 aber nur für endlich viele $Spin^c$ -Strukturen \tilde{Q} der Fall sein. Es reicht daher zu zeigen, dass die Faser $p^{-1}(\tilde{Q})$ nur endlich viele Elemente enthält, die als λ -füllbare Kontaktstrukturen realisiert werden können. Im Fall von $div(\tilde{Q}) \neq 0$ ist dies wegen der kanonischen Bijektion

$$p^{-1}(\tilde{Q}) \cong \mathbb{Z}/div(\tilde{Q})\mathbb{Z}$$

(vgl. Korollar 4.9) klar.

Sei also $div(\tilde{Q}) = 0$, dann gilt nach Proposition 4.20, dass die Elemente aus der Faser von $p^{-1}(\tilde{Q})$, die als λ -füllbare Kontaktstrukturen realisiert werden können, aus der endlichen Menge $[I_1, I_2]_{\bar{\delta}} \subset p^{-1}(\tilde{Q}) \cong \mathbb{Z}$ bestehen, wobei

$$\begin{aligned} I_1 &= \min\{I_\xi(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{N}_\mu(\tilde{Q})\} \\ I_2 &= \max\{-I_{-\xi}(\beta) \mid \beta \in \mathcal{N}_\mu(-\tilde{Q})\} \end{aligned}$$

ist (hier geht wesentlich ein, dass I nicht von X abhängt). \square

Um von der Endlichkeitsaussage über λ -füllbare Kontaktstrukturen zur allgemeinen Aussage von Theorem 4.1 zu kommen, brauchen wir folgendes Lemma aus der Kontaktgeometrie.

Lemma 4.24 (i) *Seien (Y, ξ) und (Y', ξ') zwei symplektische füllbare Kontaktmannigfaltigkeiten mit Füllungen (X, ω) und (X', ω') . Dann trägt die verbundene Summe $Y \# Y'$ (d.h. ausschneiden eines 3-Balles in beiden Mannigfaltigkeiten und verkleben entlang eines orientierungs-umkehrenden Diffeomorphismus $S^2 \rightarrow S^2$) eine Kontaktstruktur $\xi \# \xi'$, die ausserhalb einer offenen Umgebung der Verklebestelle gleich ξ bzw. ξ' ist. Die verbundene Summe von X mit X' , die durch den selben Diffeomorphismus wie für Y und Y' hervorgeht, ist dann, versehen mit einer geeigneten symplektischen Form, eine symplektische Füllung von $(Y \# Y', \xi \# \xi')$.*

(ii) Sei (Y', ξ') als Kontaktmannigfaltigkeit fixiert, so dass die von ξ' induzierte Spin^c -Struktur \tilde{Q}' mit assoziierten Spinorbündel W' die Eigenschaft hat, dass $c_1(W')$ eine Torsionsklasse oder gleich 0 ist. Seien nun ξ_1 und ξ_2 zwei Kontaktstrukturen auf einer beliebigen orientierbaren und geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit Y , so dass $[\xi_1] \neq [\xi_2]$ in $\pi_0(\Xi_Y)$ gilt, dann gilt $[\xi_1 \# \xi'] \neq [\xi_2 \# \xi']$ in $\pi_0(\Xi_{Y \# Y'})$.

Beweis: (i) Dies ist ein Spezialfall der Ergebnisse in [45] oder [12]. \square

Um nun Satz 4.23 mit diesem Lemma 4.24 zu verbinden, brauchen wir noch eine elementare Konstruktion.

Lemma 4.25 *Es existiert eine zusammenhängende, geschlossene 3-Mannigfaltigkeit Y' , die ein Element $\lambda \in H^2(Y'; \mathbb{R})$ ungleich 0 und eine dazugehörige λ -füllbare Kontaktstruktur ξ' besitzt.*

Beweisskizze (vgl. [25, §(v)], [12]): Es sei $T = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ der Lagrange-Torus. Wir bezeichnen dessen Volumenform mit η . Nun sei $1/2 > \epsilon > 0$ beliebig und $B = B_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}$ der Ball mit Radius ϵ . Wir wählen

$$X = B \cdot T$$

vermöge der Standardmultiplikation von \mathbb{C} wirkend auf Elemente aus $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Nun ist unser gesuchtes $Y' = \partial X = (\partial B) \cdot T$ und unser gesuchtes $\lambda \in H^2(X; \mathbb{R})$ bzw. $\in H^2(Y'; \mathbb{R})$ der Push-Forward unter der obigen Standardmultiplikation von η modulo exakten Formen auf X bzw. Y' . Sei θ der analoge Push-forward der Volumenform von ∂B auf Y' , dann ist $\theta \wedge d\theta$ eine positive Volumenform und wir definieren daher ξ' als die Kontaktstruktur, die durch θ festgelegt wird. Sei ω ein Repräsentant von λ , dann ist (X, ω) eine symplektische Füllung von (Y', ξ') . \square

Nun können wir die Endlichkeitsaussage für symplektische füllbare Kontaktstrukturen beweisen:

Satz 4.26 *Sei Y eine geschlossene orientierte und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nur endlich viele Elemente aus $\pi_0(\Xi)$, die als symplektisch füllbare Kontaktstrukturen realisiert werden können.*

Beweis: Angenommen Y hat unendlich viele Elemente in $\pi_0(\Xi)$, die als symplektisch füllbare Kontaktstrukturen realisiert werden können. Wir wählen (Y', ξ') und λ wie in Lemma 4.25. Sei $\eta \in \lambda$ ein Repräsentant. Wir können oBdA. annehmen, dass der Träger von η ausserhalb eines vorgegebenen Balls $B_\epsilon \subset Y'$ vom Radius $\epsilon > 0$ (ϵ hinreichend klein) liegt, denn: innerhalb eines solchen Balles ist η exakt, also durch $d\theta$ für eine 1-Form θ darstellbar. Sei

$f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abschneidefunktion die auf $B_{\epsilon/2}$ konstant gleich 1 ist und ausserhalb von B_ϵ gleich null ist, dann ist $\eta - d(f\theta)$ zu η cohomolog und konstant gleich 0 auf $B_{\epsilon/2}$.

Wir können also λ zu einer Cohomologieklass λ' ungleich 0 auf $Y \# Y'$ fortsetzen. Wegen Lemma 4.24 und unserer Annahme gibt es nun unendlich viele Elemente in $\pi_0(\Xi_{Y \# Y'})$, die als λ' -füllbare Kontaktstrukturen realisiert werden können. Das steht aber im Widerspruch zu Satz 4.23. \square

Beweis von Theorem 4.1: Um den Beweis Endlichkeitsaussage komplett abzuschließen, fehlt nur die entsprechende Aussage für symplektisch semi-füllbare Kontaktstrukturen. Auf dieselbe Weise, wie wir es für symplektisch füllbare Kontaktstrukturen im vorherigen Satz 4.26 gezeigt haben, sieht man auf analoge Weise unter Verwendung von Proposition 4.22 anstatt Proposition 4.20, dass für ein unzusammenhängendes $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ gilt, dass für jede Zusammenhangskomponente Y_i nur endlich viele Elemente $\pi_0(\Xi_{Y_i})$ als 'Teil' (gemäß Definition 1.4) einer symplektisch füllbaren Kontaktstruktur realisiert werden können. \square

Anhang A

Berechnung einer Eulerklasse

An dieser Stelle werden wir den Beweis von Proposition 4.19 nachholen. Die zu beweisende Aussage ist die folgende:

Proposition A.1 *Sei (M, g) eine orientierte, geschlossene Riemannsche 4-Mannigfaltigkeit und $\tilde{P} \rightarrow M$ eine $Spin^c$ -Struktur mit assoziierten Spinorbündel $W = W^+ \oplus W^- \rightarrow M$, dann gilt*

$$\langle e(W^+), [M] \rangle = (c_1(\mathcal{L})^2 - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))/4 = \text{ind}(\mathcal{D}), \quad (\text{A.1})$$

wobei $\mathcal{L} = \det(W^+)$ das Determinanten-Linienbündel von \tilde{P} und \mathcal{D} die Linearisierung der Seiberg-Witten-Gleichungen mit entsprechender Eichfixierung bezeichne (vgl. §2.1.4.4).

Die zweite Gleichung ist bereits aus der Indexberechnung im geschlossenen Fall bekannt (siehe §2.1.5 oder [34, §6.1 ff.]).

Wie im Beweis von Proposition 3.19 ist klar, dass im Falle einer fast komplexen Struktur J , die die $Spin^c$ -Struktur \tilde{P} im Sinne von Proposition 2.12 induziert, der gesuchte Index gleich 0 ist. Man beachte, dass die Geschlossenheit der von J induzierten selbstdualen 2-Form ω nicht eingeht.

Um den allgemeinen Fall zu zeigen, verwenden wir folgendes Konzept:

1. Sei Φ_0 eine generische Fortsetzung von Φ_0 von dem Kegelende auf ganz X^+ . An jeder Nullstelle x_i von Φ_0 ändern wir die Topologie von X^+ durch Einkleben von $\mathbb{C}P^2$ und zeigen, dass dadurch alle Nullstellen von Φ_0 eliminiert werden können und somit anschließend $\text{ind}(\mathcal{D}) = 0$ gelten muss.

2. Als nächstens machen wir diese Einklebevorgänge sukzessive rückgängig und zeigen, dass dabei der Index von \mathcal{D} für je eine Nullstelle x_i um ± 1 (je nach Index $\text{ind}(x_i)$ der Nullstelle) geändert wird. Dies leiten wir aus einer analogen Situation — abhängig vom Index der Nullstelle — im Modelraum S^4 her.

Die Betrachtung im Punkt 2 basiert auf der Excision-Idee aus [8, §7.1] für geschlossene Mannigfaltigkeiten.

A.1 Einkleben von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$

Sei (M, g) eine beliebige orientierte, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand) und $\tilde{P} \rightarrow M$ eine $Spin^c$ -Struktur mit assoziierten Halbspinorbündeln $W^\pm \rightarrow M$ und einem $U(1)$ -Zusammenhang auf dem Determinanten-Linienbündel \mathcal{L} von \tilde{P} . Sei $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ ein beliebiger generischer Schnitt (siehe Definition 4.2), dann besitzt dieser nur endlich vielen Nullstellen. Wir möchten uns nun damit beschäftigen, wie wir durch Einkleben von k -mal $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ diese Nullstellen so eliminieren können, dass im Falle von $\partial M = \emptyset$ der Ausdruck

$$\langle e(W^+), [M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 0, k \leq r$$

bzw. falls die Mannigfaltigkeit M Rand, hat

$$\langle e(W^+; \Phi_0|_{\partial M}), [M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \partial M] \rangle = 0, k \leq r$$

gilt. Die Subtilität dieser Angelegenheit liegt darin, darauf zu achten, dass man beim Verkleben beide Halb-Spinor-Bündel W^\pm und die Clifford-Multiplikation ebenfalls richtig mitverklebt.

Wir werden als erstes zeigen, dass auf der 4-Sphäre S^4

$$\langle e(W^+), [S^4] \rangle = -1$$

gilt. Abbildung A.1 motiviert dann, dass man beim Einkleben vom $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ darauf achten muss, dass in der 'dualen' Situation auf der S^4 ein Plus-Spinor-Bündel mit Eulerzahl -1 entstehen muss. Wenn wir also auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ die $Spin^c$ -Struktur zur komplexen Struktur wählen, ist

$$\langle e(W^+), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 0$$

und wir können erwarten, mit dem Einkleben von diesem $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eine Nullstellen vom Index -1 von Φ_0 auf M eliminieren zu können. Durch die Wahl einer $Spin^c$ -Struktur auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, die

$$\langle e(W^+), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = -2$$

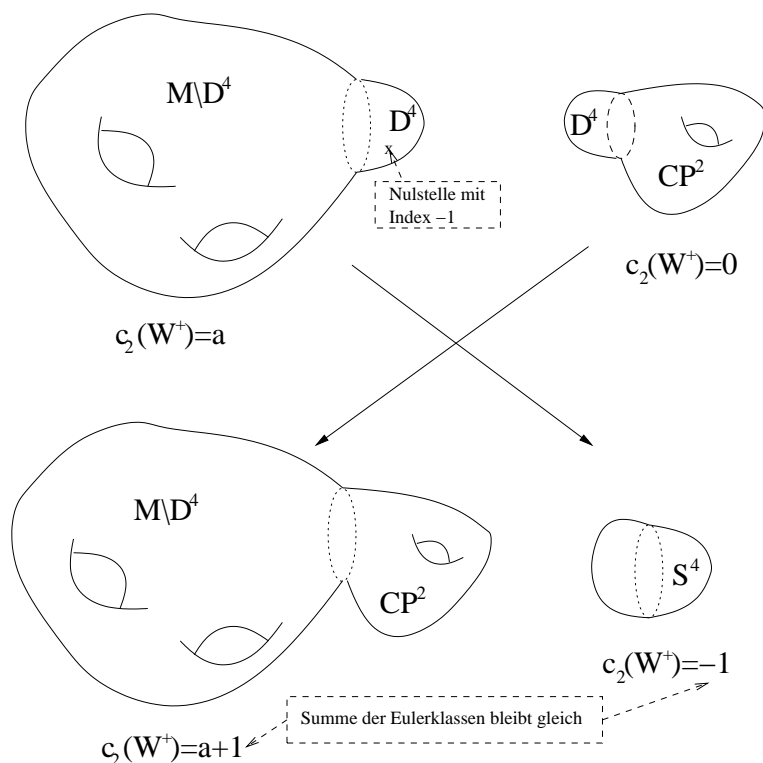


Abbildung A.1: Nullstelle vom Index -1 durch Einkleben von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eliminieren.

erfüllt, kann man auf analoge Weise eine Nullstelle vom Index +1 des Schnittes Φ_0 auf M eliminieren. Die technischen Details möchten wir im folgenden nun erklären.

Lemma A.2 *Auf der runden 4-Sphäre S^4 gibt es genau eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow S^4$. Seien $W^\pm \rightarrow S^4$ die assoziierten Halb-Spinor-Bündel, dann gilt für die Eulerklasse $e(W^+) = c_2(W^+)$, dass*

$$\langle e(W^+), [S^4] \rangle = -1$$

ist.

Beweis: Da die S^4 keine zweite Cohomologie besitzt, es also

$$H^2(S^4, \mathbb{Z}) = 0$$

gilt (vgl. [40, p. 190]), kommt als Determinanten-Linienbündel nur das triviale Linienbündel in Frage. Also existiert genau eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow S^4$. Die Formel

$$\chi(S^4) = \int_{S^4} \hat{\mathcal{A}}(TS^4)(ch(W^+) - ch(W^-)) \quad (\text{A.2})$$

aus [28, §III.12, Prop.12.24] wird uns helfen die zu untersuchende Eulerklasse auszurechnen. Wir brauchen dafür drei Konventionen bzw. Betrachtungen:

a) $\widehat{\mathcal{A}}(TS^4)$ bezeichnet das A-Dach-Geschlecht der S^4 , welches in unserem Fall

$$\widehat{\mathcal{A}}(TS^4) = 1 - \frac{1}{24}p_1(TS^4)$$

erfüllt (vgl. [28, §III.11]), wenn man mit p_1 die erste Pontrjagin-Klasse bezeichnet. Es gilt (vgl. [33, §15.1, Lem.15.2])

$$p_1(TS^4 \oplus \vartheta) = p_1(TS^4).$$

für das triviale Normalenbündel $S^4 \subset \mathbb{R}^5$. Nun ist aber $TS^4 \oplus \vartheta$ gleich dem trivialen Tangentialbündel des \mathbb{R}^5 eingeschränkt auf die S^4 , was $p_1(TS^4) = 0$ ([33, §15]) und somit

$$\widehat{\mathcal{A}}(TS^4) = 1$$

begründet.

b) Wir bezeichnen mit $\chi(S^4)$ die Euler-Charakteristik der S^4 , die aber als alternierende Summe der Betti-Zahlen in unserem Fall

$$\chi(S^4) = 2$$

erfüllt, was darauf zurückzuführen ist, dass die S^4 nur 0-te und 4-te Cohomologie besitzt (vgl. [40, p. 190]).

c) Der Ausdruck $ch(W^+)$ bzw. $ch(W^-)$ bezeichnet den Chern-Charakter des Bündels W^+ (respektive W^-). Wir werden einige grundlegende Fakten für den Chern-Charakter ch und charakteristische Klassen kurz wiederholen:

- Seien $V_1, V_2 \rightarrow M$ komplexe Vektorbündel über eine geschlossene Mannigfaltigkeit, dann definiert man die totale Chern-Klasse als

$$c(V_1) = 1 + c_1(V_1) + c_2(V_2) + \dots$$

und es gilt (vgl. [33, §14, Eq. (14.7)])

$$c(V_1 \oplus V_2) = c(V_1)c(V_2).$$

Dies stellt ein nützliches Werkzeug zur Berechnung von Chern-Klassen von direkten (Whitney-)Summen von Bündeln dar.

- Der Chern-Charakter eines komplexen n -dimensionalen Vektorbündels $E \rightarrow M$ über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M ist durch

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} s_k(c_1(E), c_2(E), \dots, c_n(E))$$

gegeben, wobei s_k das k -te elementar symmetrische Polynom beschreibe, also durch

$$\sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j}$$

in den formalen Variablen x_1, \dots, x_n gegeben ist.

- Der Chern-Charakter ist additiv, d.h. seien $E, E' \rightarrow M$ komplexe Linienbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit M , dann gilt (vgl. [33, §16] und [28, §III.11, Prop 11.16])

$$ch(E \oplus E') = ch(E) + ch(E').$$

- Für ein komplexes Linienbündel L gilt

$$ch(L) = e^{c_1(L)}.$$

- Der Chern-Charakter ist also als Polynom in den Chern-Klassen gegeben. Wir nutzen nun das *Splitting-Prinzip* (vgl. [7, §IV.21]), das besagt, dass man oBdA. annehmen kann, dass ein komplexes Vektorbündel als direkte Summe von Linienbündeln zerfällt, wenn man (syntaktisch) polynomielle Identitäten zwischen den Chern-Klassen zeigen möchte.

Sei $E = W^+$ oder gleich $E = W^-$, dann zerfalle nach obiger Betrachtung oBdA. E als direkte Summe von komplexen Linienbündeln L_1 und L_2 :

$$E = L_1 \oplus E_2$$

Dann gilt wiederum nach obiger Betrachtung und dem Produkt-Theorem für die totale Chern Klasse

$$\begin{aligned} ch(E) &= e^{c_1(L_1)} + e^{c_1(L_2)} \\ &= 2 + c_1(L_1) + c_1(L_2) + \frac{c_1^2(L_1)}{2} + \frac{c_1^2(L_2)}{2} \\ &= 2 + c_1(L_1 \oplus L_2) + \frac{1}{2} c_1^2(L_1 \oplus L_2) - c_1(L_1)c_1(L_2) \\ &= 2 + c_1(E) + c_1^2(E) - c_2(E) \end{aligned}$$

Da wiederum die S^4 keine zweite Cohomologie besitzt, gilt

$$ch(E) = 2 - c_2(E).$$

Die Gleichung (A.2) wird nun zu

$$2 = \int_{S^4} (-c_2(W^+) + c_2(W^-)). \quad (\text{A.3})$$

Angenommen es gilt

$$c_2(W^+) = -c_2(W^-), \quad (\text{A.4})$$

dann folgt aus (A.3), dass

$$2 = -2\langle c_2(W^+), [S^4] \rangle$$

gilt, woraus wiederum die Behauptung folgt. Es bleibt also lediglich (A.4) zu zeigen. Um dies zu erreichen, zeigen wir, dass das Spinorbündel $W \rightarrow S^4$ trivial ist. Wir betrachten die S^4 kanonisch in \mathbb{R}^5 eingebettet. Das Spinorbündel $\widehat{W} \rightarrow \mathbb{R}^5$ ist komplex 4-dimensional (vgl. [34, §2.5]). Wir definieren punktweise eine Clifford-Aktion

$$\phi : T_x S^4 \rightarrow \text{End}(W_x),$$

durch

$$\phi(v) = v \cdot c_x,$$

wobei c_x der Ortsvektor von $x \in S^4$ und \cdot die Clifford-Aktion von $Cl(5)$ auf $\widehat{W} \rightarrow \mathbb{R}^5$ bezeichne. Da

$$\phi(v)\phi(v) = v c_x v c_x = -v v c_x c_x = v v = -1$$

gilt, können wir ϕ zu einem Monomorphismus

$$Cl(T_x S^4) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(W_x)$$

fortsetzen, der aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus ist. Da die Spin-Darstellung von $Cl(5) \otimes \mathbb{C}$ irreduzibel war, ist diese Darstellung ebenfalls irreduzibel. Wegen Eindeutigkeit der irreduziblen Spin-Darstellung (vgl. [34, §2.4]) ist dies die komplexe Spin-Darstellung von $Cl(T_x S^4) \otimes \mathbb{C}$. Da diese Definition nicht von der lokalen Situation um x abhängt, erhalten wir dadurch eine Spin-Darstellung die man als den Bündelisomorphismus

$$Cl(TS^4) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \text{End}(\widehat{W})$$

bekommt. Wir haben also das Spinorbündel $W \rightarrow S^4$ durch Einschränkung des Spinorbündels $\widehat{W} \rightarrow \mathbb{R}^5$ auf S^4 erhalten und somit gezeigt, dass $W \rightarrow S^4$ trivial ist. Daraus folgt nun

$$0 = c_2(W) = c_2(W^+) + c_2(W^-),$$

also folgt (A.4), was, wie bereits gesehen, die Behauptung impliziert. \square

Wir kehren zu unserer Mannigfaltigkeit M mit $Spin^c$ -Struktur $\widetilde{P} \rightarrow M$ und dem generischen Schnitt $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ mit den endlich vielen Nullstellen zurück. Sei $x_0 \in M$ eine beliebige Nullstelle von Φ_0 .

A.1.1 Nullstelle vom Index -1

Wir betrachten zunächst den Fall, dass

$$\text{ind}(x_0) = -1$$

gilt. Wir gehen nun wie folgt vor:

Schritt 1: Wir wählen in einer Kartenumgebung (U, φ) von x_0 einen um x_0 zentrierten, offenen 4-Ball $D^4 \subset M$ vom Radius $\epsilon > 0$, der einen eventuell vorhandenen Rand nicht berührt oder schneidet. Desweiteren wählen wir einen beliebigen Punkt $y \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ und wählen ebenfalls in einer Kartenumgebung (U', φ') von y einen um y zentrierten, offenen 4-Ball \tilde{D}^4 in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Diese Karten sind so gewählt, dass die Standardbasis des \mathbb{R}^4 auf U eingeschränkt in M positiv und auf U' eingeschränkt in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ negativ orientiert ist.

Schritt 2: Wir können D^4 mit der (offenen) Nordhalbkugel und \tilde{D}^4 mit der (offenen) Südhalbkugel der S^4 kanonisch identifizieren. Aus diesem Grunde sei die Metrik auf M so gewählt, dass sie auf D^4 (in der entsprechenden Trivialisierung (U, φ)) mit der Metrik auf der Nordhalbkugel der S^4 übereinstimmt, analog dazu sei die Metrik auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ so gewählt, dass sie auf \tilde{D}^4 mit der Metrik auf der Südhalbkugel der S^4 übereinstimmt. Wir gehen dabei stillschweigend von der durch die \mathbb{R}^5 induzierten Metrik auf der S^4 aus.

Schritt 3: Es gilt nun

$$\partial(M \setminus D^4) = \partial(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4) = S^3$$

und die Metrik auf der S^3 sei die Metrik der S^4 auf die Äquatorlinie eingeschränkt.

Schritt 4: Wir verkleben nun $M \setminus D^4$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4$ entlang dem S^3 -Rand und erhalten $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Eine solche Verklebung wird durch einen Diffeomorphismus

$$\eta : S^3 \xrightarrow{\varphi^{-1}} \partial(M \setminus D^4) \xrightarrow{\cong} \partial(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4) \xrightarrow{\varphi'} S^3$$

gegeben, wobei dann das Resultat durch

$$M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2 = \left((M \setminus D^4) \sqcup (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4) \right) / \{x \in S^3 : x = \eta(x)\}$$

definiert wird, wobei \sqcup die disjunkte Vereinigung bezeichne.

Die Verklebung sei kanonisch, d.h. die Verklebung geschieht so, dass die analoge Verklebung von $\overline{D^4}$ mit $\overline{\tilde{D}^4}$ entlang dem S^3 -Rand mit der selben Verklebe-Abbildung $\eta : S^3 \rightarrow S^3$, als Resultat die S^4 mit der von \mathbb{R}^5 induzierten Metrik und Orientierung hat. Aufgrund der Wahl der Metriken auf M und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ verkleben sich diese Metriken zu einer neuen glatten (!) Metrik. Die Wahl der Orientierungen erklärt, warum sich beide Orientierungen auf

$M \setminus D^4$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4$ zu einer globalen Orientierung auf $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ zusammensetzen.

Schritt 5: Wir wählen die $Spin^c$ -Struktur auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, die der fast komplexen Struktur vermöge Proposition 2.12 entspricht. Die Darstellung in lokalen Koordinaten der $Spin^c$ -Struktur, der Halbspinorbündel und der Clifford-Aktion hängt nur von der Metrik und der Orientierung ab.

Die S^3 besitzt keine zweite (Co)homologie und hat daher genau eine $Spin$ und genau eine $Spin^c$ -Struktur, d.h. die $Spin^c$ -Struktur von $M \setminus D^4$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4$ eingeschränkt auf die S^3 sind gleich, aufgrund von §2.1.2 gilt dies auch für die Bündel W^+ und W^- .

Unsere Wahlen für die Metriken und der Orientierung in den Karten erlauben uns daher die $Spin^c$ -Strukturen und die Halbspinorbündel vermöge Identifikation (in den jeweiligen Karten) über der S^3 zu einer globalen $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ zu verkleben, wobei die Verklebung der Halbspinorbündel als Resultat die assoziierten Halbspinorbündel $W^\pm \rightarrow M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ der neuen $Spin^c$ -Struktur hat.

Lemma A.3 *Sei $W^+ \rightarrow M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ das durch obige Konstruktion gewonnene Plus-Halbspinorbündel der neuen $Spin^c$ -Struktur auf $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ und $W^+ \rightarrow M$ das ursprüngliche Plus-Halbspinorbündel auf M . Dann gilt, falls $\partial M = \emptyset$,*

$$\langle e(W^+), [M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = \langle e(W^+), [M] \rangle + 1,$$

bzw. im Fall, dass M einen Rand ∂M hat, gilt

$$\langle e(W^+; \Phi_0|_{\partial M}), [M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2, \partial M] \rangle = \langle e(W^+; \Phi_0|_{\partial M}), [M, \partial M] \rangle + 1$$

Beweis: Wir schränken den generischen Schnitt Φ_0 über M auf $\Phi_0|_{M \setminus D^4}$ ein und setzen ihn beliebig generisch auf ganz $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ fort und nennen den so erhaltenen Schnitt Φ'_0 . Nun reicht es nach dem Poincaré-Hopf-Indexsatz (siehe Bemerkung 4.4) zu zeigen, dass die Summe der Indizes der Nullstellen von Φ'_0 um eins kleiner ist als die analoge Summe der Nullstellen von Φ_0 .

Sei $\widehat{W}^+ \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ das Plus-Halbspinorbündel von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Sei $\Psi \in C^1(\widehat{W}^+)$ ein generischer Schnitt, so dass

$$\Psi|_{S^3 = \partial(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus D^4)} = \Phi'_0|_{S^3}$$

gilt. Wir wissen, dass $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eine kompatible fast komplexe Struktur trägt und somit wegen Proposition 2.12

$$\langle e(\widehat{W}^+), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 0$$

gilt. Zu beachten ist, dass die Existenz einer kompatiblen fast komplexen Struktur durch unsere spezielle Wahl der Metrik nicht vernichtet worden ist, denn: Man kann die von uns geforderte Metrik auf \tilde{D}^4 mit der ursprünglichen kanonischen Metrik auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ in einer Tuben-Umgebung $S^3 \times [0, \delta)$ des S^3 -Randes ineinander homotopieren und so die gewünschte Metrik erhalten. Sei dabei J die kompatible fast komplexe Struktur auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ zur ursprünglichen Metrik und sei e_1, \dots, e_4 eine ON-Basis auf $\tilde{D}^4 \cup S^3 \times [0, \delta')$, $\delta' > \delta$ mit der 'Metrik-Homotopie', so dass $Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$ auf $S^3 \times (\delta, \delta')$ gilt, dann ist klar, dass die fast komplexe Struktur J auf ganz $\tilde{D}^4 \cup S^3 \times [0, \delta')$ mit der selben Vorschrift fortgesetzt werden kann.

Wir betrachten nun eine generische Fortsetzung von $\Psi|_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4}$ auf ganz $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, also insbesondere auf \tilde{D}^4 . Seien y_1, \dots, y_k die Nullstellen von Ψ in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ und bezeichne $\text{ind}(y_i) = \pm 1$ den jeweiligen Index einer Nullstelle dann reicht es also zu zeigen, dass

$$\sum_{y_i \in \{y_1, \dots, y_k\} \cap \tilde{D}^4} \text{ind}(y_i) = 0 \quad (\text{A.5})$$

gilt, denn daraus folgt wegen $\langle e(\widehat{W}^+), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 0$, dass

$$\sum_{y_i \in \{y_1, \dots, y_k\} \cap (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4)} \text{ind}(y_i) = 0,$$

was wiederum die Behauptung impliziert. Aufgrund der Wahl der Metrik auf M und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ verkleben sich die $Spin^c$ -Strukturen und die Halbspinorbündeln von D^4 und \tilde{D}^4 zu einer $Spin^c$ -Struktur mit assoziierten Halbspinorbündel auf S^4 . Dabei wird der Schnitt $\tilde{\Psi}$, der durch Verkleben des Schnittes Φ auf D^4 und Ψ auf \tilde{D}^4 entsteht, zu einem generischen Schnitt im Plus-Spinorbündel $W^+ \rightarrow S^4$, der auf der D^4 -Nord-Halbkugel genau eine Nullstelle vom Index -1 trägt, welche durch x_0 gegeben ist. Lemma A.2 liefert uns dann genau (A.5). \square

A.1.2 Nullstelle vom Index +1

Nun betrachten wir den umgekehrten Fall, dass

$$\text{ind}(x_0) = +1$$

gilt. Wir brauchen zunächst folgendes Lemma:

Lemma A.4 *Es existiert eine $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, so dass das assoziierte Plus-Halbspinorbündel*

$$\langle e(W^+), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = -2$$

erfüllt.

Beweis: Aus [33, §14, Thm. 14.10] erhalten wir, dass für die totale Chern-Klasse ($c = 1 + c_1 + c_2 + \dots$)

$$c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = (1 + h)^3$$

gilt, wobei die (torsionsfreie) Cohomologie von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ durch $1, h, h^2$ mit $h \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z})$ erzeugt wird. Koeffizientenvergleich liefert uns dann

$$c_1(T\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 3h|_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}. \quad (\text{A.6})$$

Ebenso wissen wir (siehe [33, §14]), dass

$$\langle h^2, \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rangle = 1$$

ist.

Betrachten wir nun die durch die kompatible fast komplexe Struktur gegebene $Spin^c$ -Struktur (vermöge Proposition 2.12), dann hat diese als Determinanten-Linienbündel K , wobei das kanonische Linienbündel mit $K \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (siehe Beweis von Proposition 2.12) bezeichnet sei. Es gilt

$$K = \Lambda^{0,2}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2 = (\Lambda^{2,0}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^{-1}, \quad (\text{A.7})$$

da

$$(\Lambda^{2,0}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \otimes (\Lambda^{0,2}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = \Lambda^4T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \otimes \mathbb{C}$$

das triviale Linienbündel ist, weil $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eine Orientierung besitzt. Angenommen $\Lambda^{1,0}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ zerfällt als Summe von Linienbündeln $L_1 \oplus L_2$, dann ist wegen dem Produkt-Theorem für Chern-Klassen (vgl. [33, §14, Eq. (14.7)]) und der Tatsache, dass Tensorieren von Linienbündeln dem Addieren ihrer Chern-Klassen entspricht, (vgl. [33, §16])

$$c_1(\Lambda^{1,0}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = c_1(L_1) + c_1(L_2) = c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(\Lambda^{2,0}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \quad (\text{A.8})$$

(die letzte Gleichung gilt, da man oBdA. eine hermitesche Metrik gewählt hat, die $L_1 \perp L_2$ erfüllt). Wie in diesem Abschnitt schon einmal, machen wir von dem Splitting-Prinzip aus [7, §IV.21]) Gebrauch, welches besagt: Falls $\Lambda^{0,1}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ nicht als Summe zweier Linienbündel zerfällt, ist die Gleichung (A.8) trotzdem richtig. Nun folgt aus (A.6), (A.7) und (A.8)

$$c_1(K) = -c_1(K^{-1}) = -c_1((\Lambda^{1,0}T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^2)) = -c_1(T\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = -3h.$$

Wir bezeichnen mit $\widehat{W}^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ das Plus-Halbspinorbündel, dass zur kanonischen (der durch die fast komplexen Struktur gegebene) $Spin^c$ -Struktur gehört, die als Determinanten-Linienbündel K hat. Sei $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ das Linienbündel, dass

$$c_1(\mathcal{L}) = h \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$$

erfüllt. Wir wählen als $Spin^c$ -Struktur $\tilde{P} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ diejenige, die als Determinanten-Linienbündel $K \otimes \mathcal{L}^2$ hat, dabei geht das Plus-Halbspinorbündel \widehat{W}^+ zu

$$W^+ = \widehat{W}^+ \otimes \mathcal{L}$$

(siehe §2.1.2.3) über. Bezeichne $\epsilon \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ das triviale Linienbündel, dann liefert uns die Produktformel für die totale Chernklasse

$$\begin{aligned} e(W^+) &= c_2(\widehat{W}^+ \otimes \mathcal{L}) = c_2((\epsilon \otimes \mathcal{L}) \oplus (K \otimes \mathcal{L})) \\ &= c_1(K)c_1(\mathcal{L}) + c_1^2(\mathcal{L}) \\ &= -3h^2 + h^2 = -2h^2. \end{aligned}$$

Dies belegt, dass $\tilde{P} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ die gesuchte $Spin^c$ -Struktur ist. \square

Wir machen genau dieselbe Verklebe-Konstruktion um die Nullstelle x_0 vom Index +1 wie im vorherigen Fall, jedoch verwenden wir auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ eine $Spin^c$ -Struktur, deren Existenz in Lemma A.4 behauptet wird, welche also

$$\langle e(W^+), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = -2$$

erfüllt.

Lemma A.5 *Sei $W^+ \rightarrow M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ das durch obige Konstruktion gewonnene Plus-Halbspinorbündel der neuen $Spin^c$ -Struktur auf $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ und $W^+ \rightarrow M$ das ursprüngliche Plus-Halbspinorbündel auf M . Dann gilt falls $\partial M = \emptyset$*

$$\langle e(W^+), [M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = \langle e(W^+), [M] \rangle - 1$$

bzw. im Fall, dass M einen Rand ∂M hat, gilt

$$\langle e(W^+; \Phi_0|_{\partial M}), [M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2, \partial M] \rangle = \langle e(W^+; \Phi_0|_{\partial M}), [M, \partial M] \rangle - 1$$

Beweis: Der Beweis ist recht analog. Wir erklären dennoch schematisch die Argumentation:

1. Wähle wieder generische Fortsetzung Φ'_0 von Φ_0 auf ganz $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$.
2. Ebenso wähle eine generische Fortsetzung von Φ_0 über D^4 auf ganz S^4 . Nun hat Φ_0 auf D^4 genau eine Nullstelle vom Index +1, daraus folgt analog wegen Lemma A.2, dass die Summe der Indizes der Nullstellen auf \tilde{D}^4 gleich -2 ist.
3. Daraus folgt, dass die Summe der Indizes der Nullstellen von Φ' auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \tilde{D}^4$ gleich 0 ist.

Dies liefert die Behauptung. \square

Satz A.6 *Sei M eine orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand) der Dimension 4 und $\tilde{P} \rightarrow M$ eine Spin^c -Struktur über M . Sei $W^+ \rightarrow M$ das zu \tilde{P} assoziierte Plus-Halbspinorbündel, das einen generischen Schnitt mit nur endlich vielen Nullstellen zulässt.*

Dann kann man durch Einkleben von $k < \infty$ vielen $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$'s wie in den obigen Konstruktionen erreichen, dass für die resultierende Mannigfaltigkeit $M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ mit dem resultierenden Plus-Halbspinorbündel W^+ , das auf

$$M \cap (M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$$

mit dem ursprünglichen übereinstimmt, gilt, dass im Falle $\partial M = \emptyset$

$$\langle e(W^+), [M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 0$$

und im Fall, dass wir Rand ∂M und einen nichtverschwindenden Schnitt $\Phi_0 \in C^1(W^+|_{\partial M})$ haben,

$$\langle e(W^+, \Phi_0), [M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \partial M] \rangle = 0$$

gilt.

Beweis: Dies ist durch evtl. mehrfacher Wiederholung obiger Konstruktionen bewiesen. \square

A.2 Änderung von $\text{ind}(\mathcal{D})$ um ± 1

Wir werden nun die noch zu beweisende Indexformel

$$\text{ind}(\mathcal{D}) = \langle e(W^+, \Phi_0), [X, \partial X] \rangle$$

wie folgt in Angriff nehmen und ab jetzt M als geschlossen, wie in der zu zeigenden Behauptung von Proposition A.1, voraussetzen.

1. Sei $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ eine generische Fortsetzung des nicht verschwindenden kanonischen Schnittes über dem Kegelerde $[1, \infty) \times \partial X$ auf ganz X^+ und $x_1, \dots, x_r \in X$ seine (zur Null transversalen) Nullstellen.
2. Wir eliminieren mit Satz A.6 $k \leq r$ Nullstellen - oBdA die Nullstellen x_1, \dots, x_k - solange bis die relative Eulerklasse

$$\langle e(W^+), [M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 0, k \leq r$$

erfüllt.

3. Es existiert daher ein nicht verschwindender Schnitt $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ über $M \# k\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Dies folgt aus [41, §III], wo Steenrod die Obstruktionstheorie hinreichend allgemein für Fortsetzbarkeit von Schnitten in Sphärenbündeln vom $k - 1$ -Skelett auf das k -Skelett ($k \leq 4$) erklärt. Mit [33, §12, Thm. 12.5] erkennt man, dass die dort auftauchende Obstruktionsklasse, genau unserer relativen Eulerklasse $e(W^+; \Phi_0)$ entspricht, die nach den Einklebevorgängen 0 ist.
4. Wegen Proposition 2.12 und Proposition 3.19 wissen wir dann, dass nach den k Einklebe-Vorgängen

$$\text{ind}(\mathcal{D}) = 0$$

gilt.

Angenommen es gilt, dass bei der Elimination einer Nullstelle $x_0 \in X$ des generischen Schnitts $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ über X^+ der Index $\text{ind}(\mathcal{D})$ sich um den Summanden $-\text{ind}(x_0)$ ändert, dann wäre die Indexformel mit obiger Betrachtung gezeigt. Es verbleibt also lediglich folgende Proposition zu zeigen, um Proposition 4.19 zu beweisen:

Proposition A.7 *Sei $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ ein generischer Schnitt über M . Sei $x_0 \in M$ eine Nullstelle von Φ_0 und $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ abhängig von $\text{ind}(x_0)$ eine Verklebung im Sinne der obigen Konstruktion (um x_0). Sei weiterhin \mathcal{D} bzw. $\tilde{\mathcal{D}}$ der aus der Linearisierung der SW-Gleichungen und der Eichtransformation hervorgegangene Operator gemäß (3.15) auf M bzw. $M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Dann gilt*

$$\text{ind}(\mathcal{D}) = \text{ind}(\tilde{\mathcal{D}}) + \text{ind}(x_0).$$

Wir wollen die Behauptung zunächst für die S^4 und den $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ zeigen.

Lemma A.8 *Sei $W^+ \rightarrow S^4$ das Plus-Halbspinorbündel der einzigen Spin^c -Struktur über der S^4 . Sei $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ ein generischer Schnitt und x_0 eine Nullstelle von Φ_0 mit $\text{ind}(x_0) = -1$ (siehe Lemma A.2). Sei $S^4 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ die Verklebung im Sinne der obigen Konstruktion an x_0 und sei \mathcal{D} der Operator aus (3.15) auf der S^4 und $\tilde{\mathcal{D}}$ der entsprechende Operator auf $S^4 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, dann gilt*

$$\text{ind}(\mathcal{D}) = \text{ind}(\tilde{\mathcal{D}}) - 1.$$

Beweis: Bei der Verklebung von S^4 mit $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ entsteht wieder ein $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ mit der kanonischen $Spin^c$ -Struktur, die von der kompatiblen fast komplexen Struktur auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ induziert wird. Nach [34, §4.6, §6.2] wissen wir, dass der Index von \mathcal{D} bzw. $\tilde{\mathcal{D}}$ auf geschlossenen 4-Mannigfaltigkeiten durch

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(\mathcal{D}) &= \frac{1}{4}(\langle c_1^2(\mathcal{L}), [S^4] \rangle - 2\chi(S^4) - 3\sigma(S^4)) \\ \operatorname{ind}(\tilde{\mathcal{D}}) &= \frac{1}{4}(\langle c_1^2(\tilde{\mathcal{L}}), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle - 2\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) - 3\sigma(\mathbb{C}\mathbb{P}^2))\end{aligned}$$

gegeben ist. Dabei bezeichne χ die Euler-Charakteristik, σ die Signatur und \mathcal{L} bzw. $\tilde{\mathcal{L}}$ das jeweilige Determinanten-Linienbündel. Da die S^4 keine zweite Cohomologie hat, gilt

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}) = \frac{1}{4}(0 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = -1.$$

In unserem Fall bezeichnet $\tilde{\mathcal{L}}$ das kanonischen Linienbündel über dem $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ und somit zeigen die Betrachtungen im Beweis von Lemma A.4, dass

$$\operatorname{ind}(\tilde{\mathcal{D}}) = \frac{1}{4}(9 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1) = 0$$

ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

Lemma A.9 *Sei $W^+ \rightarrow S^4$ das Plus-Halbspinorbündel der einzigen $Spin^c$ -Struktur über der S^4 . Sei $\Phi_0 \in C^1(W^+)$ ein generischer Schnitt und x_0 eine Nullstelle von Φ_0 mit $\operatorname{ind}(x_0) = +1$ (welche man lokal erzwingen kann). Sei $S^4 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ die Verklebung im Sinne der obigen Konstruktion an x_0 und sei \mathcal{D} der Operator aus (3.15) auf der S^4 und $\tilde{\mathcal{D}}$ der entsprechende Operator auf $S^4 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, dann gilt*

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}) = \operatorname{ind}(\tilde{\mathcal{D}}) + 1.$$

Beweis: Der Beweis geht vollkommen analog zum vorherigen Lemma A.8, nur jetzt gilt für das nach der Verklebung entstandene Determinanten-Linienbündel $\tilde{\mathcal{L}}$

$$\langle c_1^2(\tilde{\mathcal{L}}), [\mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = 1,$$

was die Änderung des Vorzeichens in der Behauptung erklärt. \square

Jetzt werden wir zeigen, dass der Effekt auf den Index von \mathcal{D} durch Einkleben von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ auf M genau derselbe wie auf der S^4 ist. Wir werden dabei die Situation von M auf die S^4 übertragen ohne die Index-Differenz zu ändern. Sei wieder $\Phi_0 \in C^\infty(W^+)$ eine generischer Spinors im zu betrachtenden Bündel $W^+ \rightarrow M$, für das die Behauptung bewiesen werden soll. Sei $x_0 \in M$ eine transversale Nullstelle und

$$\tilde{M} = M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$$

das Resultat nach dem Einkleben um x_0 , so dass

$$\langle e(\widetilde{W}^+), [M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2] \rangle = \langle e(W^+), [M] \rangle - \text{ind}(x_0)$$

gilt (siehe Satz A.6), wobei \widetilde{W}^+ das entsprechende Plus-Halbspinorbündel auf $\widetilde{M} = M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ bezeichne.

Wir bezeichnen mit \mathcal{D}_1 und $\widetilde{\mathcal{D}}_1$, den aus der Linearisierung der SW-Gleichungen gewonnen Operator (mit entsprechender Eichfixierung) vor und nach der Verklebung an einer beliebigen glatten Konfiguration $(A_0, \Phi_0) \in \mathcal{C}$ (siehe Definition 2.6). Falls $\text{ind}(x_0) = -1$ ist, wählen wir \mathcal{D}_2 und $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ (mit den dazugehörigen Mannigfaltigkeiten und Bündelraten) wie in Lemma A.8, wobei wir hier lediglich den Index \mathcal{D}_2 hinzugefügt haben. Falls $\text{ind}(x_0) = +1$ ist, wählen wir analog \mathcal{D}_2 und $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ wie in Lemma A.9.

Unser Ziel besteht darin, Index-Differenzen zu berechnen. Da es leichter ist den Index eines Operators zu berechnen, führen wir nun die Differenzoperatoren

$$\widehat{D}_i = \widetilde{D}_i \oplus (-\mathcal{D}_i)^*, i = 1, 2$$

ein, deren Indizes genau den gesuchten Index-Differenzen entsprechen. Man bemerke, dass diese Operatoren auf eine disjunkte Vereinigung von Mannigfaltigkeiten definiert sind. Es ist klar, dass $D_i, i = 1, 2$ Fredholm-Operatoren sind, da dies bereits für die Operatoren, aus denen sie konstruiert worden sind, zutrifft.

Proposition A.10 *Es gilt*

$$\text{ind}(\widehat{D}_1) = \text{ind}(\widehat{D}_2).$$

Beweis: Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Situation aus [8, §7.1.2], welche dort bewiesen wird. \square

Beweis von Proposition A.7: Das Verhalten des Index beim Einkleben haben wir auf der S^4 gesehen und für diese Fälle in den Lemmata A.8 und A.9 die Behauptung bewiesen. Proposition A.10 besagt, dass der allgemeine Fall auf M bzw. \widetilde{M} auf einen dieser Fälle über der S^4 , je Index der betrachteten Nullstelle, zurückgeführt werden kann, ohne dass die Indexdifferenz

$$\text{ind}(\mathcal{D}_i) - \text{ind}(\widetilde{\mathcal{D}}_i) = \text{ind}(\widehat{D}_i), i = 1, 2$$

verändert wird. Dies schließt den Beweis ab. \square

Literaturverzeichnis

- [1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, and I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **77** (1975), pp. 43–69.
- [2] ———, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry III*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **79** (1976), pp. 71–99.
- [3] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators I*, Ann. of Math. **93** (1968), pp. 484–530.
- [4] T. Aubin, *Espaces de Sobolev sur les variétés Riemanniennes*, Bull. Sc. Math. **100** (1976), pp. 149–173.
- [5] ———, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, no. 252, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [6] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac-Operators*, Springer Verlag, 1992.
- [7] R. Bott and L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1982.
- [8] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford University Press, 1990.
- [9] J. Eichorn, *Elliptic differential operators on noncompact manifolds*, Analysis of the Karl-Weierstrass-Institute of Mathematics, Berlin (1986/87), 4-169, Teubner Texte Math., 106, Teubner, Leipzig, 1988.
- [10] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. **98** (1989), no. 3, pp. 623–637.
- [11] ———, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **2** (1992), no. 1-2, pp. 165–102.

- [12] ———, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2* , Internat. J. Math. (1990), no. 3, pp. 29–46.
- [13] Y. Eliashberg and W.P. Thurston, *Contact structures and foliations on 3-manifolds*, Turkish J. Math. **0** (1996), no. 1, pp. 19–35.
- [14] K.D. Elworthy and A.J. Tromba, *Differential Structures and Fredholm Maps*, Proc. Sympos. Pure Math. (Berkeley, California, 1968), vol. 15, pp. 45–94.
- [15] P. M. Fitzpatrick, *Homotopy, linearization and bifurcation*, Nonlinear Analysis TMA **12** (1988), pp. 171–184.
- [16] P. M. Fitzpatrick and J. Pejsachowicz, *Parity and generalized multiplicity*, Trans. AMS **326** (1991), pp. 281–305.
- [17] P. M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz, and P. J. Rabier, *The degree of proper C^2 Fredholm mappings I*, Reine angew. Math. **427** (1992), pp. 1–33.
- [18] K.A. Frøyshov, *The Seiberg-Witten equations and four manifolds with boundary*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 3, pp. 19–35.
- [19] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in almost complex manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), pp. 307–347.
- [20] M.L. Gromov and H.B. Lawson, *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math (1984), no.58, pp. 83–196.
- [21] F. Hirzebruch and W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, B.I. Hochschultaschenbücher, Band 296, 1971.
- [22] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer Verlag, 1998.
- [23] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, no. 132, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [24] M.A. Kervaire, *Relative characteristic classes*, Amer. J. Math. **79** (1957), pp. 517–558.
- [25] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math. **130** (1997), no. 2, pp. 209–255.
- [26] ———, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, pp. 797–808.

- [27] W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, Vieweg Studium, 1999.
- [28] H.B. Lawson and M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.
- [29] P. Lisca and A. I. Stipsicz, *Tight, not semi-fillable contact circle bundles*, Preprint [arXiv:math.SG/0211429](https://arxiv.org/abs/math/0211429), 2002.
- [30] R.B. Lockhart and R.C. McOwen, *Elliptic differential operators on non-compact manifolds*, *Abb. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **12** (1985), no. 3, pp. 309–447.
- [31] M. Marcolli and B.L. Wang, *Equivariant Seiberg-Witten-Floer homology*, *Commun. Anal. Geom.* **9** (2001), no. 3, pp. 451–639.
- [32] J. Martinet, *Formes de contact sur les variétés 3*, *Lect. Notes in Math.* **209** (1971), pp. 142–163.
- [33] J.W. Milnor and J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [34] J. W. Morgan, *The Seiberg-Witten Equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Princeton University Press, 1996.
- [35] J.W. Morgan, T.S. Mrowka, and D. Ruberman, *Introduction to Complex Analysis part III: Functions of Several Variables*, American Mathematical Society, 1992.
- [36] ———, *The L^2 -moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants*, *Monographs in Geometry and Topology*, no. II, International Press, Cambridge, MA, 1994.
- [37] L.I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 28, American Mathematical Society, 2000.
- [38] J. Pejsachowicz and P. J. Rabier, *Degree theory for C^1 Fredholm mappings of index zero*, *J. Analyse Math.* **76** (1998), pp. 289–319.
- [39] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, *Amer. J. Math.* **87** (1965), pp. 861–866.
- [40] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [41] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1972.
- [42] C.H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, *J. Differential Geom.* **5** (1987), no. 3, pp. 363–430.

- [43] ———, *SW \Rightarrow Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 3, pp. 845–918.
- [44] ———, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, pp. 809–822.
- [45] A. Weinstein, *Contact surgery and symplectic handlebodies*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), no. 2, pp. 241–251.
- [46] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 1995.
- [47] E. Witten, *Electromagnetic duality, monopole condensation and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B426** (1994), pp. 19–52.
- [48] ———, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, pp. 769–796.